

尤溪一中 2019-2020 学年上学期高三理科数学周测 (五) 答案解析

第 1 题答案 B

第 1 题解析: “不到长城非好汉” 等价于 “好汉到长城”, 所以 “到长城” 是 “好汉” 的必要条件.

第 2 题答案 C

第 2 题解析: 因为 $y = f(3-2x)$ 的定义域为 $[-1, 2]$, 所以 $-1 \leq 3-2x \leq 5$, 所以函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 5]$. 选 C.

第 3 题答案 B

第 3 题解析: $\because a = \int_{-1}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^1 = 2, \therefore m = \log_5 2, n = \log_2 3, p = \frac{1}{2},$

$\because m = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}, n = \log_2 3 > 1, p = \frac{1}{2}, \therefore m < p < n$. 故选 B.

第 4 题答案 D

第 4 题解析: 因为函数 $f(x)$ 为 R 上的减函数, 所以当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 递减, 即 $a - 3 < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 递减, 即 $a > 0$;

且 $(a-3) \times 1 + 5 \geq \frac{2a}{1}$, 解得 $a < 2$, 综上可知实数 a 的取值范围是 $(0, 2]$.

第 5 题答案 C

第 5 题解析: 对于 A, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = |x|$, 且 $x \neq 0$, 故可能;

对于 B, 当 $x > 0$ 且 $a > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$, 当 $x < 0$ 且 $a > 0$ 时, $f(x) = -x + \frac{a}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数, 故可能;

对于 D, 当 $x < 0$ 且 $a < 0$ 时, $f(x) = -x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{-x \cdot \frac{a}{x}} = 2\sqrt{-a}$, 当 $x > 0$ 且 $a < 0$ 时, $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增

函数, 故可能, 且 C 不可能.

第 6 题答案 C

第 6 题解析

由 $f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_{0.8} u \\ u = 2x^2 - ax + 3 \end{cases}$, 因为 $y = \log_{0.8} u$ 在定义域上为减函数, 且复合函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为减函

数, 所以 $u = 2x^2 - ax + 3$ 在 $(-1, +\infty)$ 上必为增函数, 所以 $\begin{cases} \frac{a}{2} \leq 1 \\ u(-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 2 \\ 2 + a - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq a \leq 2$.

第 7 题答案 A

第 7 题解析: $\because y = f(x-1)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以函数 $f(x)$ 关于原点对称, 即函数 $f(x)$ 是奇函数, 又由

$f(x+2) = f(-x)$, 可知函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 由 $f(2) = f(0) = 0, f(3) = f(-1) = -f(1) = -4$,

所以 $f(2018) + f(2019) + f(2020) = f(2) + f(3) + f(0) = -4$.

第 8 题答案 C

第 8 题解析

$\because \sin(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{2}{3}$, 所以 $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}$, 又 $\because \sin 2x = -\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = 1 - 2\cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{9}$,

$\therefore f\left[\frac{6\sin 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})}\right] = f(1)$, 由题意函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 即 $f(1) = f(2) = 20$.

第9题答案 A

第9题解析

设 $f(x)$ 的值域为 A , $g(x)$ 的值域为 B , 对任意 $x_1 \in R$, 都存在 $x_2 \in R$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $A \subset B$, $A = (-\infty, 0)$, 设

$h(x) = ax^2 - 2x + 1$, 设 $h(x)$ 的值域为 C , 则 $(0, 1) \subseteq C$.

当 $a = 0$, 显然可以; 当 $a > 0$ 时, 则 $\Delta = (-2)^2 - 4a \geq 0$, 解得 $0 < a \leq 1$; 当 $a < 0$ 时, 则 $\frac{4a-4}{4a} = 1 - \frac{1}{a} > 1$, 显然成立. 综上, $a \leq 1$. 故答案选 A.

第10题答案 C

第10题解析

因为 $f(x) = 4 \sin \frac{\omega x}{2} \cdot \cos \frac{\omega x}{2} = 2 \sin \omega x$, 所以在区间 $[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$ 是函数含原点的递增区间,

又因为函数在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 所以 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}] \subseteq [-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}]$,

所以满足不等式 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2\omega} \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2\omega} \geq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \omega \leq 1 \\ \omega \leq \frac{3}{4} \end{cases}$, 又因为 $\omega > 0$, 所以 $0 < \omega \leq \frac{3}{4}$,

又因为函数在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值,

根据正弦函数的性质可知 $\omega x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, 即函数在 $x = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}$ 处取得最大值, 可得 $0 \leq \frac{\pi}{2\omega} \leq \pi$, 所以 $\omega \geq \frac{1}{2}$,

综上可得 $\omega \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

第11题答案 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

第11题解析

由题知 $\forall x \in R, a \sin x + \cos x < 2$, 即 $\sqrt{a^2 + 1} < 2$, 所以 $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

第12题答案 $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

第12题解析

$\rho = 2 \sin \theta$ 与 $\rho \cos \theta = -1$ 联立方程得 $2 \sin \theta \cos \theta = -1$, $\therefore \sin 2\theta = -1$, $\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$.

$\therefore \rho = 2 \sin \frac{3}{4}\pi = \sqrt{2}$, 极坐标为 $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

第13题答案 $\frac{2\pi}{3}$

第13题解析

$\therefore (1 - \sqrt{3} \tan \alpha)(1 - \sqrt{3} \tan \beta) = 4 \therefore 1 - \sqrt{3}(\tan \alpha + \tan \beta) + 3 \tan \alpha \tan \beta = 4$

即 $\tan(\alpha + \beta) = -\sqrt{3}$, $\therefore \alpha + \beta$ 的最小正值是 $\frac{2\pi}{3}$.

第 14 题答案 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}) \cup (0, \frac{\pi}{6})$

第 14 题解析

由题意易知,当 $x=0$ 时,不等式 $f(x) < 2\sin x$ 不成立,

故构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{2\sin x}, x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$,

$\because f(-x) = -f(x), \therefore g(-x) = \frac{f(-x)}{-2\sin x} = g(x), g(x)$ 为 $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ 上偶函数,

由 $f(\frac{\pi}{6}) = 1$, 得 $g(\frac{\pi}{6}) = 1, \therefore g(-\frac{\pi}{6}) = 1$,

$\therefore g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{2(\sin x)^2}$, $\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 由 $f'(x)\tan x > f(x)$ 得 $f'(x)\sin x - f(x)\cos x > 0$,

$g'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{2(\sin x)^2} > 0$, 即 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g(x)$ 单调递增,

由偶函数得, 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $g(x)$ 单调递减,

因此由不等式 $f(x) < 2\sin x$ 得 $\begin{cases} x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ g(x) < 1 = g(\frac{\pi}{6}) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ g(x) > 1 = g(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$,

$\therefore 0 < x < \frac{\pi}{6}$ 或 $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$, 解集为 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}) \cup (0, \frac{\pi}{6})$.

第 15 题答案 (1) $T = \pi, [k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbb{Z})$; (2) $m \in [1, \sqrt{2}), \tan(x_1 + x_2) = -1$.

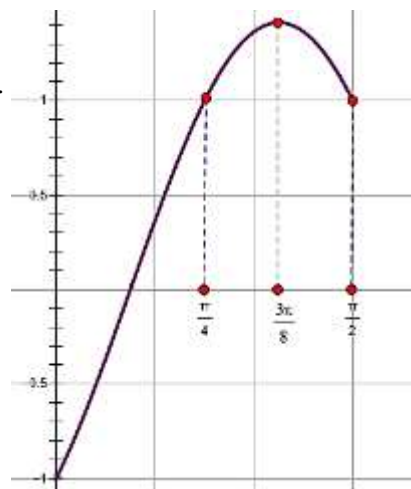
第 15 题解析

$$(1) f(x) = (\sin x + \cos x)^2 - 2\cos^2 x = \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) (x \in \mathbb{R}).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 $T = \pi$.

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{8} (k \in \mathbb{Z}),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{3\pi}{8}] (k \in \mathbb{Z})$.



(2) 函数 $g(x) = f(x) - m$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个不同的零点等价于 $y = f(x)$ 和 $y = m$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个不同的交点;

在直角坐标系中画出函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象,

由图象可知当且仅当 $m \in [1, \sqrt{2})$ 时, 方程 $f(x) = m$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8})$ 和 $(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$ 有两个不同的解 x_1, x_2 , 且 x_1 与

$$x_2 \text{ 关于直线 } x = \frac{3\pi}{8} \text{ 对称, 即 } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3\pi}{8}, \therefore x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{4}, \tan(x_1 + x_2) = -1.$$

第 16 题答案 见解析

第 16 题解析

$$(1) \text{ 当 } x = 0 \text{ 时 } f(0) = 0, \text{ 由 } f(x) = xe^x - \ln(x+1) - x, \text{ 得 } f'(x) = e^x(x+1) - \frac{1}{x+1} - 1,$$

$$\text{所以斜率 } k = f'(0) = e^0(0+1) - \frac{1}{0+1} - 1 = -1, \text{ 所以切线方程为 } y = -x.$$

$$(2) \text{ 由题可知, 函数的定义域为 } (-1, +\infty), \text{ 由 (1) 知 } f'(x) = e^x(x+1) - \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{e^x(x+1)^2 - x - 2}{x+1},$$

$$\text{记 } g(x) = e^x(x+1)^2 - x - 2, \text{ 所以 } g'(x) = e^x(x^2 + 4x + 3) - 1,$$

易知 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = -1$,

又因为 $g(1) = e^1(1+1)^2 - 1 - 2 = 4e - 3 > 0$, 所以在区间 $(0, 1)$ 内必存在 ε 使 $g(\varepsilon) = 0$,

所以当 $x \in (0, \varepsilon)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (\varepsilon, 1)$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增,

所以当 $x = \varepsilon$ 时, $f(x)$ 有极小值且为 $f(\varepsilon)$,

$$\text{因为 } f(0) = 0 \times e^0 - \ln(0+1) - 0 = 0, \text{ 所以 } f(\varepsilon) < f(0) = 0,$$

而 $f(1) = 1 \times e^1 - \ln(1+1) - 1 = e - \ln 2 - 1 > 0$, 所以在区间 $(\varepsilon, 1)$ 内必存在唯一零点,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有且只有一个零点.

