尤溪一中 2019-2020 学年上学期高二数学周测（三）答案解析

第 1 题答案 A

第 1 题解析

设与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 有共同渐近线的双曲线方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=\lambda$，又∵该双曲线过点 $(2,\ 2)$，

$\therefore\lambda=\frac{2^2}{2}-(-2)^2=-2$，即 $\frac{x^2}{2}-y^2=-2$，即 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$ 为所求双曲线方程.

第 2 题答案 C

第 2 题解析

根据题意，要求等轴双曲线 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，则可以设其方程为：$x^2-y^2=\lambda$，$(\lambda>0)$，

对于抛物线 $y^2=16x$，其准线方程为 $x=-4$，设等轴双曲线与抛物线的准线 $x=-4$ 的两个交点 $A(-4,y)$，

$B(-4,-y)$，$(y>0)$，若 $|AB|=4$，则有 $|y-(-y)|=4$，解可得 $y=2$，即 $A(-4,2)$，$B(-4,-2)$，

代入双曲线方程可得：$16-4=\lambda$，解可得 $\lambda=12$，则该双曲线的标准方程为：$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{12}=1$，

则 $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，则 C 的实轴长 $2a=4\sqrt{3}$，故选：C .

第 3 题答案 D

第 3 题解析

若焦点在 x 轴上，则 $a=2$ 又 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore c=\sqrt{3}\therefore b^2=a^2-c^2=1$，∴方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，即 $x^2+4y^2=4$.

若焦点在 y 轴上，则 $b=2$ 又 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\therefore a^2=4b^2=16$，∴方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$，即 $4x^2+y^2=16$.

第 4 题答案 C

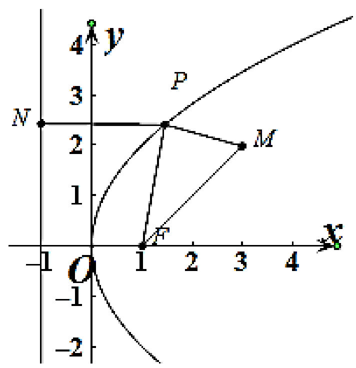
第 4 题解析

∵双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率为 2 $\therefore a^2=m>0$，$b^2=3$.

$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{3}{m}}=2$，$\therefore m=1$，∴“$m=1$”是“双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率为 2”的充要条件.

第 5 题答案 D

第 5 题解析



由题意得抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $l:x=-1$，焦点坐标为 $F(1,0)$，

过点 P 作 $PN\perp l$ 于 N，根据抛物线的定义可得 $|PF|=|PN|$，

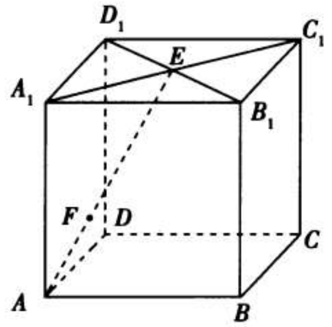
又 ΔPMF 的周长为 $|PM|+|PF|+|MF|=|PM|+|PN|+|MF|$，且 $|MF|=2\sqrt{2}$，

结合图形可得，当 M,P,N 三点共线时，$|PM|+|PN|$ 最小，且最小值为 $3-(-1)=4$，

所以 $|PM|+|PN|+|MF|$ 的最小值为 $4+2\sqrt{2}$，即 ΔPMF 的周长最小值为 $4+2\sqrt{2}$.

第 6 题答案 D

第 6 题解析



如图所示，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}$，$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}$，

$\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{AD}$，

$\therefore\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.故选 D.

第 7 题答案 B

第 7 题解析

在方程$x^2+y^2-4x-9=0$中,令$x=0$,得$y=\pm3$,不妨设$A(0,-3)$，$B(0,3)$.

设双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

$\because$点A在双曲线上,$\therefore\frac{9}{a^2}=1$,$\therefore a^2=9$.

$\because A$，B两点恰好将此双曲线的焦距三等分,$\therefore$双曲线的焦点为$(0,-9)$，$(0,9)$.$a^2+b^2=81$.$\therefore b^2=72$.

$\therefore$双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{72}=1$.

第 8 题答案 D

第 8 题解析

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$\because\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,$\therefore y_1=-3y_2$,

$\because e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,设$a=2t$,$c=\sqrt{3}t$,$b=t$,$\therefore x^2+4y^2-4t^2=0$①,设直线$AB$方程为$x=sy+\sqrt{3}t$，

代入①中消去x,可得$(s^2+4)y^2+2\sqrt{3}sty-t^2=0$,$\therefore y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}st}{s^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{t^2}{s^2+4}$，

由$y_1=-3y_2$可得$-2y_2=\frac{-2\sqrt{3}st}{s^2+4}$,$-3y_2^2=-\frac{t^2}{s^2+4}$.解得$s^2=\frac{1}{2}$,$k=\sqrt{2}$.故选 D.

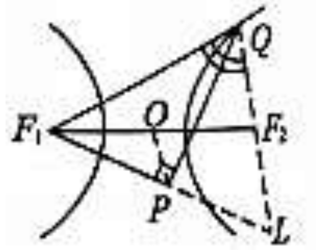
第 9 题答案 B

第 9 题解析

由抛物线方程，得$\frac{p}{2}=\frac{4}{2}=2$，再由抛物线的定义，可知所求距离为$4+2=6$.故选 B.

第 10 题答案 A

第 10 题解析



如图所示，点Q在双曲线的右支上，有$|QF_1|-|QF_2|=2a$ ①.

延长F_1P、QF_2交于L.

$\because\angle F_1QP=\angle LQP$，$QP\perp F_1P$，$\therefore|F_1Q|=|QL|$，代入①，

则$|QL|-|QF_2|=2a$，即$|F_2L|=2a$.

取线段F_1F_2中点O，则由P是F_1L中点有：$|PO|=\frac{1}{2}|F_2L|=\frac{1}{2}\cdot2a=a$.

$\therefore P$的轨迹是以O为圆心，以a为半径的圆.故选 A.

第 11 题答案 7

第 11 题解析

设$A(5\cos\theta,3\sin\theta)$，圆心$C(1,0)$，

$|AC|^2=(5\cos\theta-1)^2+(3\sin\theta)^2=25\cos^2\theta-10\cos\theta+1+9\sin^2\theta$

$=16\cos^2\theta-10\cos\theta+10=16(\cos\theta-\frac{5}{6})^2+\frac{135}{16}$，

当$\cos\theta=-1$时，$|AC|$的取得最大值6，从而$|AB|$的最大值为$6+1=7$.

第 12 题答案 4

第 12 题解析

因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

即$\sqrt{3}x\pm3y=0$，又圆$(x+4)^2+y^2=8$的圆心为$(-4,0)$，半径为$r=2\sqrt{2}$，

所以圆心到任一条渐近线的距离为$d=\frac{|-4\sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}}=2$，因此，弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=4$.

第 13 题答案 8

第 13 题解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3,2,5)\cdot(1,x,-1)=-3+2x-5=8$，解得$x=8$.

第 14 题答案 4

第 14 题解析

由$y^2=4x$得，$F(1,0)$. 设直线AB方程为$x=my+1$，$A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，且$y_1>0>y_2$

则联立$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$. 则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

由$y^2=4x$得$y=2\sqrt{x}(y>0)$，$y=-2\sqrt{x}(y<0)$，

则$y>0$时，$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，即点A处切线斜率为：$\frac{1}{\sqrt{\frac{y_1^2}{4}}}=\frac{2}{y_1}$，$\therefore l_1:y-y_1=\frac{2}{y_1}(x-\frac{y_1^2}{4})$.

同理可得：$l_2:y-y_2=\frac{2}{y_2}(x-\frac{y_2^2}{4})$，则：$P(\frac{y_1y_2}{4},\frac{y_1+y_2}{2})$，即$P(-1,2m)$，

点P到直线$x-my-1=0$的距离为$d=\frac{|-1-2m^2-1|}{\sqrt{1+m^2}}=2\sqrt{m^2+1}$，

又$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16m^2+16}=4(m^2+1)$

$\therefore S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=4(m^2+1)\cdot\sqrt{m^2+1}=4\sqrt{(m^2+1)^3}$，

$\because m^2\geq0$，$\therefore S_{\Delta ABP}\geq4$，$\therefore\Delta ABP$面积的最小值为$4$.

第 15 题答案 见解析.

第 15 题解析

(1)$\because$抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点坐标为$(1,0)$,$\therefore \frac{p}{2}=1$,

即$p=2$,$\therefore$抛物线C 的方程为$y^2=4x$.$\frac{p}{2}=1$

(2)证明:①当直线AB 的斜率不存在时,即直线AB 的方程为$x=8$

可得A,B的坐标为$(8,\pm4\sqrt{2})$,$\therefore k_{OA}\cdot k_{OB}=(-\frac{4\sqrt{2}}{8})\times\frac{4\sqrt{2}}{8}=-\frac{1}{2}$.

②当直线AB 的斜率存在时,设直线AB 方程为$y=k(x-8)$,$A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,

联立方程组$\begin{cases}y^2=4x\\ y=k(x-8)\end{cases}$,消去$y$ 得:$k^2x^2-(4+16k^2)x+64k^2=0$,

则:$x_A+x_B=\frac{4+16k^2}{k^2}$,$x_Ax_B=64$,

$\therefore k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_Ay_B}{x_Ax_B}=\frac{k^2(x_A-8)(x_B-8)}{x_Ax_B}=\frac{k^2[x_Ax_B-8(x_A+x_B)+64]}{x_Ax_B}=\frac{k^2(64-8\times\frac{4+16k^2}{k^2}+64)}{64}=-\frac{1}{2}$.

综合①②可知,直线OA,OB的斜率之积为定值$\frac{1}{2}$.

第 16 题答案 (1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2)$3$.

第 16 题解析

(1)由题意知,$4a=8$,则$a=2$,

由椭圆离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,得$c=1$,$\therefore b^2=3$.$\therefore$椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;

(2)设直线m的方程为:$x=ty-1$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}x=ty-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,得$\left(4+3t^2\right)y^2-6ty-9=0$. $y_1+y_2=\frac{6t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3t^2+4}$.

$\therefore S_{\Delta PQF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=\frac{12\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4}$.

令$\sqrt{t^2+1}=n$,则$n\ge1$,

$\therefore S_{\Delta PQF_2}=\frac{12}{3n+\frac{1}{n}}$,而$3n+\frac{1}{n}$在$[1,+\infty)$上单调递增,$\therefore S_{\Delta PQF_2}=\frac{12}{3n+\frac{1}{n}}\le3$.

当$n=1$时取等号,即当$t=0$时,ΔPQF_2的面积最大值为3.