

第5章 振动环境中的运动参数测量

火炮研究的一项重要内容就是要提高火炮的射击精度，保证火炮的射击稳定性和静止性，提高火炮的综合性能和控制火炮的受载。其中射击精度是设计火炮的一个重要性能指标，也是火炮工作者设计火炮时主要考虑的指标之一。炮口的动力学响应，即其在三个方向的运动量和角度，研究表明，炮口扰动对火炮的射击精度影响较大。由于火炮发射时的振动冲击和火光影响会对放置附近的测量设备产生不可忽略的扰动，从而严重影响测量结果。

目前，对炮管口的动力学响应的测量主要是采用光学杠杆测量方法。该技术在野外难以标定，并受振动和炮口火光的影响很大，存在很多不确定的因素，很难保证测量的精度。

本文提出了基于高速像机的炮口扰动测量，采用多台像机交会的摄影方法实现炮口扰动测量，并对振动环境下测量目标运动参数进行了研究，提出了使用固连修正相机对测量相机外参数所受振动进行实时修正的方法，有效消除振动的影响，在测量系统参数受振动的情况下，仍能得到目标位置的高精度测量结果。

5.1 抗振测量原理

采用固连像机平行修正测量（测量像机和修正像机的光轴平行）和固连像机垂直修正测量两种方法（测量像机和修正像机的光轴垂直）实现抗振测量。与测量像机固连修正像机。修正像机与测量像机之间的相对位置需事先进行标定，在修正测量像机的视场内设置一个可作为“基准”的基准标定板（即该基准标定板认为不受振动的影响）。在执行测量任务过程中，修正像机对准基准标定板，并实时采集基准标定板的图像，通过处理基准标定板的图像实时标定修正像机的外参数；再根据已知的测量像机与修正像机间的位置关系，达到对测量像机外参数所受扰动进行修正的效果。如图 5-1 所示。

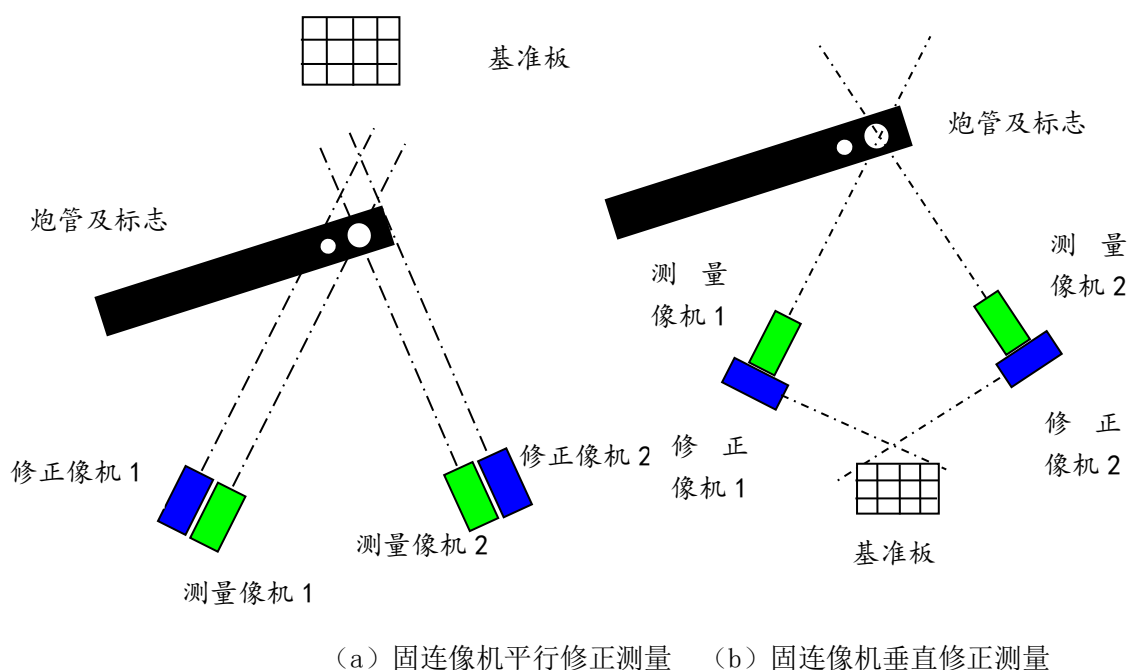


图 5-1 测量原理示意图

假设未振动时测量像机的坐标系为 C-XYZ, 像机的外参数为 R 和 T; 修正像机的空间坐标为 C'-X'Y'Z', 像机的外参数为 R' 和 T', 则空间点 P 在修正像机 C'-X'Y'Z' 中的坐标和在测量像机初始坐标系 C-XYZ 中的坐标之间存在坐标转换关系:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R' \left(R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T \right) + T' \quad (5-1)$$

5.2 固连修正像机实时修正测量像机外参数

修正像机的内参数标定同测量像机的标定方法一致, 是在试验前就必须标定好, 但在测试时需要实时获取测量像机的外参数, 不可能从 8 个不同方位对标定板进行拍摄, 只能获得一幅标定板的图像, 因而外参数的确定不能采用以上的算法。

在已知像机内参数的情况下, 采用摄影测量理论中的空间后方交会方法, 由物方若干个控制点以及相应的像点, 解求摄站的坐标与影像的方位。如图 3 所示, 物方一已知点 $P_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 在影像上的成像 $P_i(x_i, y_i)$, 根据影像已知的内方位元素 (f, x_0, y_0) 可求得从摄站 $S(X_s, Y_s, Z_s)$ 到已知点 P 的观测方向 α_i 和 β_i :

$$\begin{aligned} \tan \alpha_i &= \frac{x_i - x_0}{f} \\ \tan \beta_i &= \frac{y_i - y_0}{\sqrt{f^2 + (x_i - x_0)^2}} \end{aligned} \quad (5-2)$$

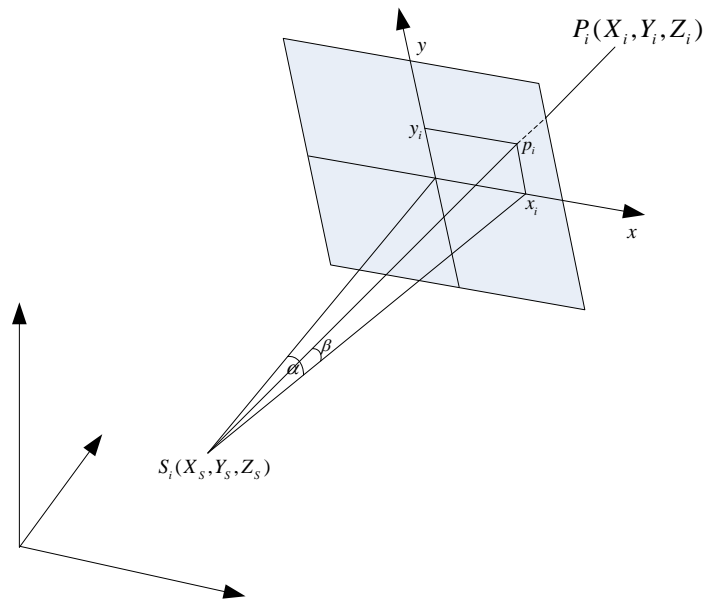


图 5-2 摄影测量空间后方交会

然后由三个已知点 $P_i(i=1,2,3)$ 与相应像点 $p_i(i=1,2,3)$ 的坐标直接求摄站 S 的坐标与摄影方位,项目采用两步法实现摄像机外参数的精确标定,一采用直接解法求解初值;二采用迭代解法求解精确值。在实际修正时,我们采用 12 个已知点获取像机的实时外参数。

5.2.1 距离方程组

由图 5-2 可知:

$$S_i \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta_i \sin \alpha_i \\ \cos \beta_i \cos \alpha_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

\mathbf{R} 是影像坐标系相对于物方坐标系的旋转矩阵,对于另一个物方控制点 $P_j(j=1,2,4; j \neq i)$ 可得一相似的方程式:

$$\begin{aligned} & (-2)[\cos \alpha_i \cos \beta_j, \sin \alpha_j \cos \beta_j, \sin \beta_j] S_j \\ & = (-2)[X_j - X_s, Y_j - Y_s, Z_j - Z_s] \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

现将 (2-2-18) 式两边左乘到方程 (2-2-17), 可得

$$\begin{aligned} & 2S_i S_j [\sin \beta_i \sin \beta_j + \cos \beta_i \cos \beta_j \cos(\alpha_j - \alpha_i)] \\ & = (-2) [(X_i - X_s)(X_j - X_s) + (Y_i - Y_s)(Y_j - Y_s) + (Z_i - Z_s)(Z_j - Z_s)] \\ & = [(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2] - \\ & \quad [(X_i - X_s)^2 + (Y_i - Y_s)^2 + (Z_i - Z_s)^2] - \\ & \quad [(X_j - X_s)^2 + (Y_j - Y_s)^2 + (Z_j - Z_s)^2] \\ & = S_{ij}^2 - S_i^2 - S_j^2 \end{aligned}$$

令

$$\cos \varphi_{ij} = \sin \beta_i \sin \beta_j + \cos \beta_i \cos \beta_j \cos(\alpha_j - \alpha_i)$$

则上式可化为

$$S_{ij}^2 = S_i^2 + S_j^2 - 2S_i S_j \cos \varphi_{ij}$$

显然,由 (2-2-20) 式可知其几何意义是一个三角形中的余弦公式。对于摄站 S 与三个控制点 P_1 , P_2 和 P_3 可构成一个四面体,如图 2-2-6 所示。对这个四面体可构成如下方程组:

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 - 2S_1 S_2 \cos \varphi_{12} + S_2^2 - S_{12}^2 &= 0 \\ S_2^2 - 2S_2 S_3 \cos \varphi_{23} + S_3^2 - S_{23}^2 &= 0 \\ S_3^2 - 2S_3 S_1 \cos \varphi_{31} + S_1^2 - S_{31}^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

其中 S_{12} , S_{23} , S_{31} 是相应控制点之间的距离; φ_{12} , φ_{23} , φ_{31} 是应射线 (棱线) 之间的夹角, 均可由已知点的坐标和射线方位角 α , β 求得, 是方程组的已知值。而 S_{12} , S_{23} , S_{31} 是待求的未知值, 是方程组的未知数。因此方程组 (2-2-21) 也可写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + x_2^2 + b_{12} &= 0 \\ x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + x_3^2 + b_{23} &= 0 \\ x_3^2 + 2a_{31}x_3x_1 + x_1^2 + b_{31} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

其中 $a_{ij} = \cos \varphi_{ij}$, $b_{ij} = S_{ij}^2$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$)。因此, 解算摄站 S 到三个控制点的距离问题, 被归结为解算一个三元二次联立方程组的问题。这个方程组的解算方法有两种, 一是迭代解法; 二是直接解法。这些解法将在下面推导。

5.2.2 解求摄站坐标与影像方位元素

由于旋转正交矩阵 R 可利用反对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

组成

$$R = (E - S)^{-1}(E + S)$$

因此, 方程式 (2-2-17) 可写成

$$(E - S)S_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \cos \beta_i \\ \sin \alpha_i \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix} = (E + S) \begin{bmatrix} X_i - X_s \\ Y_i - Y_s \\ Z_i - Z_s \end{bmatrix}$$

将 S 代入, 并按已知量 (其中 S_i 已解得, 为已知量) 和未知量 (X_s , Y_s , Z_s 以及 a, b, c), 将上式进行整理, 得

$$\begin{aligned}
& S_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \cos \beta_i \\ \sin \alpha_i \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & S_i \sin \beta_i + Z_i & -S_i \sin \alpha_i \cos \beta_i - Y_i \\ -S_i \sin \beta_i - Z_i & 0 & S_i \sin \alpha_i \cos \beta_i + X_i \\ S_i \sin \alpha_i \cos \beta_i + Y_i & -S_i \cos \alpha_i \cos \beta_i - X_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

引入辅助参数 u, v, w 则

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}$$

代入 (2-2-23)，并从三个点的 9 个方程式中选取 6 个方程式，构成 6 个线性方程组

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} S_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - X_1 \\ S_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 - Y_1 \\ S_1 \sin \beta_1 - Z_1 \\ S_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 - X_2 \\ S_2 \sin \alpha_2 \cos \beta_2 - Y_2 \\ S_3 \sin \beta_3 - Z_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & S_1 \sin \beta_1 + Z_1 & -S_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 - Y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -S_1 \sin \beta_1 - Z_1 & 0 & S_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + X_1 & 0 & 1 & 0 \\ S_1 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + Y_1 & -S_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S_2 \sin \beta_2 + Z_2 & -S_2 \sin \alpha_2 \cos \beta_2 - Y_2 & 1 & 0 & 0 \\ -S_2 \sin \beta_2 - Z_2 & 0 & S_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + X_2 & 0 & 1 & 0 \\ S_3 \sin \alpha_3 \cos \beta_3 - Y_3 & -S_3 \cos \alpha_3 \cos \beta_3 - X_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

解算上面联立方程组，即可解得旋转矩阵中三个参数 a, b, c 与三个辅助坐标参数 u, v, w 。

根据 (2-2-24) 式，可求得摄站点 S 的坐标，即

$$\begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 + a^2 & ab + c & ac - b \\ ab - c & 1 + b^2 & bc + a \\ ac + b & bc - a & 1 + c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

由上分析与推导可以看出，空间后方交会直接解法的关键是解算三元二次联立方程组 (2-2-21)。

5.2.3 解求摄站到控制点的距离

在此介绍两种算法，一种是由波兰大地测量学者于 1971 年提出的迭代解；另一种是由德国大地测

量学者 (Grafarend) 于 1989 年提出的直接解法。

1. 迭代解

改写方程组 (2-2-21)，以其中第一式为例，因为

$$\cos \varphi_{12} = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_{12}}{2} \right)$$

因此，余弦定理可写为

$$S_{12}^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 + 4S_1 S_2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_{12}}{2} \right)$$

或

$$S_{12}^2 = (S_1 - S_2)^2 + 4S_1 S_2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_{12}}{2} \right)$$

将 (2-2-28) 式乘以 $\frac{\cos \varphi_{12}}{2 \sin^2 (\varphi_{12} / 2)}$ 再加上 (2-2-27) 式，并整理，得

$$S_{12}^2 \frac{1}{2 \sin^2 (\varphi_{12} / 2)} = S_1^2 + S_2^2 + (S_1 - S_2)^2 \frac{\cos \varphi_{12}}{2 \sin^2 (\varphi_{12} / 2)}$$

令

$$2F_{12} = \frac{1}{2 \sin^2 (\varphi_{12} / 2)}$$

$$2G_{12} = \frac{\cos \varphi_{12}}{2 \sin^2 (\varphi_{12} / 2)} = 2F_{12} \cos \varphi_{12}$$

代入 (2-2-29) 式，从而可将方程组 (2-2-21) 改写为如下的形式：

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 &= 2F_{12}S_{12}^2 - 2G_{12}(S_1 - S_2)^2 \\ S_2^2 + S_3^2 &= 2F_{23}S_{23}^2 - 2G_{23}(S_2 - S_3)^2 \\ S_3^2 + S_1^2 &= 2F_{31}S_{31}^2 - 2G_{31}(S_3 - S_1)^2 \end{aligned} \right\}$$

将此方程组写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^2 \\ S_2^2 \\ S_3^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} F_{12}S_{12}^2 - G_{12}(S_1 - S_2)^2 \\ F_{23}S_{23}^2 - G_{23}(S_2 - S_3)^2 \\ F_{31}S_{31}^2 - G_{31}(S_3 - S_1)^2 \end{bmatrix}$$

由于

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

代入 (2-2-31) 式, 则可得到求解距离 S_{ij} 的迭代计算公式:

$$\begin{bmatrix} S_1^2 \\ S_2^2 \\ S_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12}S_{12}^2 - G_{12}(S_1 - S_2)^2 \\ F_{23}S_{23}^2 - G_{23}(S_2 - S_3)^2 \\ F_{31}S_{31}^2 - G_{31}(S_3 - S_1)^2 \end{bmatrix}$$

令

$$\begin{aligned} a &= [F_{12}S_{12}^2 \quad F_{23}S_{23}^2 \quad F_{31}S_{31}^2]^T \\ b^{(k)} &= [-G_{12}(S_1^{(k)} - S_2^{(k)})^2 - G_{23}(S_2^{(k)} - S_3^{(k)})^2 - G_{31}(S_3^{(k)} - S_1^{(k)})^2]^T \\ x^{(k)} &= [S_1^{2(k)} \quad S_2^{2(k)} \quad S_3^{2(k)}]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这样, 迭代计算公式可写成如下形式:

$$x^{(k+1)} = Aa + Ab^{(k)} \quad (K = 0, 1, 2, \dots)$$

因此, 距离的初值, 即当 $K=0$ 时,

$$\begin{aligned} x^0 &= Aa \\ S_i^{(0)} &= \sqrt{S_i^{(0)^2}} \\ b^{(0)} &= [-G_{12}(S_1^{(0)} - S_2^{(0)})^2 - G_{23}(S_2^{(0)} - S_3^{(0)})^2 - G_{31}(S_3^{(0)} - S_1^{(0)})^2]^T \end{aligned}$$

代入 (2-2-33) 式进行迭代。

2. 直接解

直接解的基本思想是由方程组 (2-2-21) 的三个方程式中消去常数项 $S_{12}^2, S_{23}^2, S_{31}^2$, 构成两个二次型。

$$\begin{aligned} X^T P X &= 0 \\ X^T Q X &= 0 \end{aligned}$$

然后再进行“消元”, 即 $X^T P X - \lambda g X^T Q X$, 使得矩阵 $P - \lambda Q$ 的行列式值等于零, 即

$$|P - \lambda Q| = 0$$

从而使“消元”后的方程式可作因式分解，达到解算的目的。按此思路，直接解法可分下述步骤进行。

(1) 消去方程组 (2-2-21) 的常数项。

将 (2-2-21) 中第一式分别乘以 $\left(-\frac{S_{23}^2}{S_{12}^2}\right), \left(-\frac{S_{31}^2}{S_{12}^2}\right)$ ，分别加到第二、第三式中得：

$$\begin{aligned} \frac{S_{23}^2}{S_{12}^2} x_1^2 - 2 \cos \varphi_{12} \frac{S_{23}^2}{S_{12}^2} x_1 x_2 + \frac{S_{23}^2 - S_{12}^2}{S_{12}^2} x_2^2 + 2 \cos \varphi_{23} x_2 x_3 - x_3^2 &= 0 \\ \frac{S_{31}^2 - S_{12}^2}{S_{12}^2} x_1^2 - 2 \cos \varphi_{12} \frac{S_{31}^2}{S_{12}^2} x_1 x_2 + \frac{S_{31}^2}{S_{12}^2} x_2^2 + 2 \cos \varphi_{31} x_1 x_3 - x_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

写成二次型

$$\begin{aligned} X^T P X &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot P \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ X^T Q X &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} S_{23}^2/S_{12}^2 & -\cos \varphi_{12} S_{23}^2/S_{12}^2 & 0 \\ -\cos \varphi_{12} S_{23}^2/S_{12}^2 & (S_{23}^2 - S_{12}^2)/S_{12}^2 & \cos \varphi_{23} \\ 0 & \cos \varphi_{23} & -1 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} (S_{31}^2 - S_{12}^2)/S_{12}^2 & -\cos \varphi_{12} S_{31}^2/S_{12}^2 & \cos \varphi_{31} \\ -\cos \varphi_{12} S_{31}^2/S_{12}^2 & S_{31}^2/S_{12}^2 & 0 \\ \cos \varphi_{31} & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 解求特征值 $|P - \lambda Q| = 0$ 。

现将 (2-2-34) 中的第二式乘以 $(-\lambda)$ ，加到第一式中，得

$$X^T (P - \lambda Q) X = 0$$

欲使上式可解，则其系数矩阵 $P - \lambda Q$ 必定是亏秩，即

$$|P - \lambda Q| = a_3 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -|Q| = -\frac{S_{31}^2}{S_{12}^2} \left(-\frac{S_{31}^2}{S_{12}^2} \sin^2 \varphi_{12} + \sin^2 \varphi_{31} \right) \\ a_2 &= \frac{S_{23}^2 - S_{12}^2}{S_{12}^2} \sin^2 \varphi_{31} + 2 \frac{S_{31}^2}{S_{12}^2} (1 - \cos \varphi_{12} \cos \varphi_{23} \cos \varphi_{31}) - \\ &\quad \frac{S_{31}^2}{S_{12}^2} \frac{2S_{23}^2 + S_{31}^2}{S_{12}^2} \sin^2 \varphi_{12} \\ a_1 &= -\frac{S_{31}^2 - S_{12}^2}{S_{12}^2} \sin^2 \varphi_{23} - 2 \frac{S_{23}^2}{S_{12}^2} (1 - \cos \varphi_{12} \cos \varphi_{23} \cos \varphi_{31}) + \\ &\quad \frac{S_{23}^2}{S_{12}^2} \frac{2S_{31}^2 + S_{23}^2}{S_{12}^2} \sin^2 \varphi_{12} \\ a_0 &= |P| = \frac{S_{23}^2}{S_{12}^2} \left(-\frac{S_{23}^2}{S_{12}^2} \sin^2 \varphi_{12} + \sin^2 \varphi_{23} \right) \end{aligned} \right\}$$

解算三次方程 (2-2-36), 可求得特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 三次方程的解取决于它的判别式。

(3) 改化 $X^T (P - \lambda Q) X = 0$ 。

在方程式 (2-2-35) 中引入齐次坐标 p, q :

$$p = \frac{x_2}{x_1}; q = \frac{x_3}{x_1}$$

这样 (2-2-35) 可改化为

$$\begin{aligned} &p^2 (S_{23}^2 - S_{12}^2 - \lambda S_{31}^2) + 2pq \cos \varphi_{23} S_{12}^2 + q^2 (-1 + \lambda) S_{12}^2 + \\ &2p \cos \varphi_{12} (\lambda S_{31}^2 - S_{23}^2) - 2q \lambda \cos \varphi_{31} S_{12}^2 + [S_{23}^2 - \lambda (S_{23}^2 - S_{12}^2)] = 0 \end{aligned}$$

然后再作平移

$$p = p' + p_0; q = q' + q_0$$

消去线性项, 代入式 (2-2-39), 得

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{S_{23}^2 \cos \varphi_{12} + \lambda [S_{12}^2 \cos \varphi_{23} \cos \varphi_{31} - (S_{23}^2 + S_{31}^2) \cos \varphi_{12}] + \lambda^2 S_{31}^2 \cos \varphi_{12}}{S_{23}^2 - S_{12}^2 \sin^2 \varphi_{23} + \lambda (S_{12}^2 - S_{31}^2 - S_{23}^2) + \lambda^2 S_{31}^2} \\ q_0 &= \frac{S_{23}^2 \cos \varphi_{12} \cos \varphi_{23} + \lambda [(S_{12}^2 - S_{23}^2) \cos \varphi_{31} - S_{31}^2 \cos \varphi_{12} \cos \varphi_{23}] + \lambda^2 S_{31}^2 \cos \varphi_{31}}{S_{23}^2 - S_{12}^2 \sin^2 \varphi_{23} + \lambda (S_{12}^2 - S_{31}^2 - S_{23}^2) + \lambda^2 S_{31}^2} \end{aligned} \right\}$$

$$p'^2 (S_{23}^2 - S_{12}^2 - \lambda S_{31}^2) + 2p'q' S_{12}^2 \cos \varphi_{23} + q'^2 S_{12}^2 (-1 + \lambda) = 0$$

这样 (2-2-39) 被改化为

$$p'^2 (S_{23}^2 - S_{12}^2 - \lambda S_{31}^2) + 2p'q'S_{12}^2 \cos \varphi_{23} + q'^2 S_{12}^2 (-1 + \lambda) = 0$$

进而对 (2-2-41) 式作旋转变换

$$\begin{aligned} p' &= p'' \cos \tau - q'' \sin \tau \\ q' &= p'' \sin \tau + q'' \cos \tau \end{aligned}$$

以消去互乘项 $p'q'$, 可得

$$\tan 2\tau = \frac{2S_{12}^2 \cos \varphi_{23}}{S_{23}^2 - \lambda(S_{12}^2 + S_{31}^2)}$$

以及方程式 (2-2-41) 被改化为

$$\eta^2 p''^2 - \xi^2 q''^2 = 0$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \eta^2(\lambda) &= \alpha \pm \beta; \xi^2(\lambda) = -\alpha \pm \beta \\ \alpha(\lambda) &= \frac{1}{2} [S_{23}^2 - 2S_{12}^2 + \lambda(S_{12}^2 - S_{31}^2)] \\ \beta(\lambda) &= \frac{1}{2} \sqrt{[S_{23}^2 - \lambda(S_{12}^2 + S_{31}^2)]^2 + 4S_{12}^4 \cos^2 \varphi_{23}} \end{aligned} \right\}$$

由于 (2-2-43) 可分解, 得

或

$$\begin{aligned} \eta p'' + \xi q'' &= 0 \\ \eta p'' - \xi q'' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{令 } r = q''/p''$$

所以

$$r = \frac{\eta(\lambda)}{\xi(\lambda)}$$

或分别写为

$$\left. \begin{aligned} r_-(\lambda) &= -\frac{\eta(\lambda)}{\xi(\lambda)} \\ r_+(\lambda) &= +\frac{\eta(\lambda)}{\xi(\lambda)} \end{aligned} \right\}$$

按 (2-2-46) 式, (2-2-45) 可写为

$$q''(\lambda) = r(\lambda)p''(\lambda)$$

$$\text{即 } -\sin \tau p' + \cos \tau q' = r(\lambda)(\cos \tau p' + \sin \tau q')$$

$$\text{或 } p(\sin \tau + r \cos \tau) + q(-\cos \tau + r \sin \tau) - p_0(\sin \tau + r \cos \tau) - q_0(-\cos \tau + r \sin \tau) = 0$$

(4) 距离解算过程

首先应解算三次方程(2-2-36), 求得三个特征值 λ_1, λ_2 和 λ_3 。选取其中两个特征值(例如 λ_1 和 λ_2), 分别求 $\sin \tau(\lambda_1), \cos(\lambda_1), p_0(\lambda_1), q_0(\lambda_1), r_-(\lambda_1)$ 与 $\sin \tau(\lambda_2), \cos(\lambda_2), p_0(\lambda_2), q(\lambda_2), r_+(\lambda_2)$ 代入下式构成线性联立方程组:

$$\left. \begin{aligned} p[\sin \tau(\lambda_1) + r_-(\lambda_1) \cos \tau(\lambda_1)] + q[-\cos \tau(\lambda_1) + r_-(\lambda_1) \sin \tau(\lambda_1)] - \\ p_0(\lambda_1)[\sin \tau(\lambda_1) + r_-(\lambda_1) \cos \tau(\lambda_1)] - q_0(\lambda_1)[- \cos \tau(\lambda_1) + r_-(\lambda_1) \sin \tau(\lambda_1)] = 0 \\ p[\sin \tau(\lambda_2) + r_+(\lambda_2) \cos \tau(\lambda_2)] + q[-\cos \tau(\lambda_2) + r_+(\lambda_2) \sin \tau(\lambda_2)] - \\ p_0(\lambda_2)[\sin \tau(\lambda_2) + r_+(\lambda_2) \cos \tau(\lambda_2)] - q_0(\lambda_2)[- \cos \tau(\lambda_2) + r_+(\lambda_2) \sin \tau(\lambda_2)] = 0 \end{aligned} \right\}$$

由它解求齐次坐标 $p, q; p, q$ 一定要是正实数, 否则要用 λ_3 替代(2-2-49)式中的 λ_1 或 λ_2 , 再解 p, q 。由(2-2-22)可得

$$\left. \begin{aligned} 1 + 2a_{12}p + p^2 + \frac{b_{12}}{x_1^2} = 0 \\ 1 + 2a_{23}\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \frac{b_{23}}{x_2^2} = 0 \\ 1 + 2a_{31}\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{b_{31}}{x_3^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

因此, 可由下面等式解求未知的距离:

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 = x_1^2 = -\frac{b_{12}}{1 + 2a_{12}p + p^2} \\ S_2^2 = x_2^2 = -\frac{b_{23}}{p^2 + 2a_{23}pq + q^2} \\ S_3^2 = x_3^2 = -\frac{b_{31}q^2}{1 + 2a_{31}q + q^2} \end{aligned} \right\}$$

5.2.4 迭代解法求精确值

1、空间后方交会的基本方式

空间后方交会的数学模型是共线方程，即中心投影的构像方程式（2-11）：

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_1(X_A - X_s) + b_1(Y_A - Y_s) + c_1(Z_A - Z_s)}{a_3(X_A - X_s) + b_3(Y_A - Y_s) + c_3(Z_A - Z_s)} \\ y &= -f \frac{a_2(X_A - X_s) + b_2(Y_A - Y_s) + c_2(Z_A - Z_s)}{a_3(X_A - X_s) + b_3(Y_A - Y_s) + c_3(Z_A - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

上式是非线性函数，为了便于计算，需按泰勒阶数展开，取小值一次项，使之线性化，得

$$\left. \begin{aligned} x &= (x) + \frac{\partial x}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} d\kappa \\ y &= (y) + \frac{\partial y}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} d\kappa \end{aligned} \right\}$$

式中， (x) ， (y) 为函数的近似值， $dX_s, dY_s, dZ_s, d\varphi, d\omega, d\kappa$ 为6个外方位元素的改正数。它们的系数为函数的偏导数。

下面我们将系数的求法推演如下。为书写方便，我们将共线方程中的分子、分母用下式表达：

$$\begin{aligned} \bar{X} &= a_1(X_A - X_s) + b_1(Y_A - Y_s) + c_1(Z_A - Z_s) \\ \bar{Y} &= a_2(X_A - X_s) + b_2(Y_A - Y_s) + c_2(Z_A - Z_s) \\ \bar{Z} &= a_3(X_A - X_s) + b_3(Y_A - Y_s) + c_3(Z_A - Z_s) \end{aligned}$$

各偏导数是系数，用新的符号表示，则

$$a_{11} = \frac{\partial x}{\partial X_s} = \frac{\partial \left(-f \frac{\bar{X}}{\bar{Z}} \right)}{\partial X_s} = \frac{1}{\bar{Z}} (a_1 f + a_3 x)$$

按相仿的推导步骤可得

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial x}{\partial X_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(a_1 f + a_3 x) \\ a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial Y_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(b_1 f + b_3 x) \\ a_{13} &= \frac{\partial x}{\partial Z_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(c_1 f + c_3 x) \\ a_{21} &= \frac{\partial y}{\partial X_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(a_2 f + a_3 y) \\ a_{22} &= \frac{\partial y}{\partial Y_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(b_2 f + b_3 y) \\ a_{23} &= \frac{\partial y}{\partial Z_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(c_2 f + c_3 y) \end{aligned} \right\}$$

另外,

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varphi} \bar{X} \right) \\ a_{15} &= \frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \omega} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \omega} \bar{X} \right) \\ a_{16} &= \frac{\partial x}{\partial \kappa} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \kappa} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa} \bar{X} \right) \\ a_{24} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \varphi} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varphi} \bar{Y} \right) \\ a_{25} &= \frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \omega} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \omega} \bar{Y} \right) \\ a_{26} &= \frac{\partial y}{\partial \kappa} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \kappa} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa} \bar{Y} \right) \end{aligned} \right\}$$

由于

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\ &= R^T \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} = R_\kappa^T R_\omega^T R_\varphi^T \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} = R_\kappa^{-1} R_\omega^{-1} R_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= R_{\kappa}^{-1} R_{\omega}^{-1} \frac{\partial R_{\varphi}^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
 &= R_{\kappa}^{-1} R_{\omega}^{-1} R_{\varphi}^{-1} R_{\varphi} \frac{\partial R_{\varphi}^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
 &= R_{\varphi}^{-1} R_{\varphi} \frac{\partial R_{\varphi}^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi}^{-1} &= R_{\varphi}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \\
 R_{\varphi} \frac{\partial R_{\varphi}^{-1}}{\partial \varphi} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

按相仿的方法，得

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial x}{\partial X_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(a_1 f + a_3 x) \\ a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial Y_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(b_1 f + b_3 x) \\ a_{13} &= \frac{\partial x}{\partial Z_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(c_1 f + c_3 x) \\ a_{21} &= \frac{\partial y}{\partial X_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(a_2 f + a_3 y) \\ a_{22} &= \frac{\partial y}{\partial Y_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(b_2 f + b_3 y) \\ a_{23} &= \frac{\partial y}{\partial Z_s} = \frac{1}{\bar{Z}}(c_2 f + c_3 y) \end{aligned} \right\}$$

另外,

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varphi} \bar{X} \right) \\ a_{15} &= \frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \omega} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \omega} \bar{X} \right) \\ a_{16} &= \frac{\partial x}{\partial \kappa} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \kappa} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa} \bar{X} \right) \\ a_{24} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \varphi} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \varphi} \bar{Y} \right) \\ a_{25} &= \frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \omega} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \omega} \bar{Y} \right) \\ a_{26} &= \frac{\partial y}{\partial \kappa} = -\frac{f}{(\bar{Z})^2} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \kappa} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa} \bar{Y} \right) \end{aligned} \right\}$$

由于

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\ &= R^T \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} = R_\kappa^T R_\omega^T R_\varphi^T \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^T \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} = R_\kappa^T R_\omega^T R_\varphi^T \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= R_\kappa^{-1} R_\omega^{-1} R_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= R_\kappa^{-1} R_\omega^{-1} \frac{\partial R_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= R_\kappa^{-1} R_\omega^{-1} R_\varphi^{-1} R_\varphi \frac{\partial R_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= R_\varphi^{-1} R_\varphi \frac{\partial R_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
R_\varphi^{-1} = R_\varphi^T &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \\
R_\varphi \frac{\partial R_\varphi^{-1}}{\partial \varphi} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

按相仿的方法，得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \omega} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= R_\kappa^{-1} \frac{\partial R_\omega^{-1}}{\partial \omega} R_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= R_\kappa^{-1} \frac{\partial R_\omega^{-1}}{\partial \omega} R_\omega R_\kappa R_\kappa^{-1} R_\omega^{-1} R_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= R_\kappa^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} R_\kappa R_\kappa^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{Z} \sin \kappa \\ \bar{Z} \cos \kappa \\ -\bar{X} \sin \kappa - \bar{Y} \cos \kappa \end{bmatrix} \\
\frac{\partial}{\partial \kappa} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} &= \frac{\partial R_\kappa^{-1}}{\partial \kappa} R_\kappa R_\kappa^{-1} R_\omega^{-1} R_\varphi^{-1} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ -\bar{X} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

将上述偏导数代入式 (2-20a)，并利用有关表达式，经整理得

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= y \sin \omega - \left[\frac{x}{f} (x \cos \kappa - y \sin \kappa) + f \cos \kappa \right] \cos \omega \\ a_{15} &= -f \sin \kappa - \frac{x}{f} (x \sin \kappa + y \cos \kappa) \\ a_{16} &= y \\ a_{24} &= -x \sin \omega - \left[\frac{x}{f} (x \cos \kappa - y \sin \kappa) + f \sin \kappa \right] \cos \omega \\ a_{25} &= -f \cos \kappa - \frac{y}{f} (x \sin \kappa + y \cos \kappa) \\ a_{26} &= -x \end{aligned} \right\}$$

上述系数，当已知地面点的地面坐标及相应的像点坐标和摄影机主距时，给定外方位元素的近似值后，均可计算得出。

在竖直摄影情况下，角元素都是小角（ $< 3^\circ$ ），可用 $\varphi = \omega = \kappa = 0$ 及 $Z_A - Z_S = -H$ 代替，得到各系数的近似值：

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -\frac{f}{H}, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= -\frac{x}{H} \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= -\frac{f}{H}, & a_{23} &= -\frac{y}{H} \\ a_{14} &= -f \left(1 + \frac{x^2}{f^2} \right), & a_{15} &= -\frac{xy}{f}, & a_{16} &= y \\ a_{24} &= -\frac{xy}{f}, & a_{25} &= -f \left(1 + \frac{y^2}{f^2} \right), & a_{26} &= -x \end{aligned} \right\}$$

2、空间后方交会计算中的误差方程和法方程

利用式（2-18）及相应的系数计算公式解求外方位元素时，有六个未知数，至少需要六个方程。由于每一对共轭点可列出两个方程，因此，若有三个已知地面控制点坐标，则可列出六个方程，解求六个外方位元素改正数 $dX_s, dY_s, dZ_s, d\varphi, d\omega, d\kappa$ 。测量中为提高精度，常有多余观测方程。在空间后方交会中，通常是在像片的四个角上选取四个或更多的地面控制点，因而要用最小二乘法平差计算。

计算中，通常将控制点的地面坐标视为真值，而把相应的像点坐标视为观测值，加入相应的改正数 V_x, V_y ，得 $x+V_x, y+V_y$ ，代入式（2-18）可列出每个点的误差方程式，其一般形式为

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x}{\partial \kappa} d\kappa + (x) - x$$

$$V_y = \frac{\partial y}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} dZ_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y}{\partial \kappa} d\kappa + (y) - y$$

或写成

$$\left. \begin{aligned} V_x &= a_{11}dX_s + a_{12}dY_s + a_{13}dZ_s + a_{14}d\varphi + a_{15}d\omega + a_{16}d\kappa - l_x \\ V_y &= a_{21}dX_s + a_{22}dY_s + a_{23}dZ_s + a_{24}d\varphi + a_{25}d\omega + a_{26}d\kappa - l_y \end{aligned} \right\}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} l_x &= x - (x) = x + f \frac{a_1(X_A - X_s) + b_1(Y_A - Y_s) + c_1(Z_A - Z_s)}{a_3(X_A - X_s) + b_3(Y_A - Y_s) + c_3(Z_A - Z_s)} \\ l_y &= y - (y) = y + f \frac{a_2(X_A - X_s) + b_2(Y_A - Y_s) + c_2(Z_A - Z_s)}{a_3(X_A - X_s) + b_3(Y_A - Y_s) + c_3(Z_A - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

用矩阵形式表示为

$$V = AX - l$$

式中

$$V = [V_x \quad V_y]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

$$X = [dX_s \quad dY_s \quad dZ_s \quad d\varphi \quad d\omega \quad d\kappa]^T$$

$$l = [l_x \quad l_y]^T$$

若有 n 个控制点，则可按式 (2-22) 列出 n 组误差方程式，构成总误差方程式：

$$V = AX - l \quad (2-24)$$

式中

$$V = [V_1 \quad V_2L \quad V_n]^T$$

$$A = [A_1 \quad A_2L \quad A_n]^T$$

$$L = [l_1 \quad l_2L \quad l_n]^T$$

根据最小二乘法间接平差原理，可列出误差方程式：

$$A^T PAX = A^T PL$$

式中，P 为观测值的权矩阵，反映观测值的量测精度。对所有像点坐标的观测值，一般认为是等精度量测，则 P 为单位矩阵，由此得到未知数表达式：

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L \quad (2-25)$$

从而求出外方位元素近似值的改正数 $dX_s, dY_s, dZ_s, d\varphi, d\omega, d\kappa$ 。

由于式 (2-22) 中的各系数取自泰勒级展开式的一次项，而未知数的近似值往往是粗略的，因此计算必须通过逐渐趋近的方法，即用近似值与改正数的和作为新的近似值，重复计算过程，求出新的改正数，这样反复趋近，直到改正数小于某一限值为止，最后得出六个外方位元素的解

$$\left. \begin{aligned} X_s &= X_{s0} + dX_{s1} + dX_{s2} + L \\ Y &= Y_{s0} + dY_{s1} + dY_{s2} + L \\ Z &= Z_{s0} + dZ_{s1} + dZ_{s2} + L \\ \varphi &= \varphi_0 + d\varphi_1 + d\varphi_2 + L \\ \omega &= \omega_0 + d\omega_1 + d\omega_2 + L \\ \kappa &= \kappa_0 + d\kappa_1 + d\kappa_2 + L \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

3、空间后方交会的计算过程

综上所述，空间后方交会的求解过程如下。

(1) 获取已知数据：从摄影资料中查取像片比例尺 $1/m$ 、平均航高、内方位元素 x_0, y_0, f ；从外业测量成果中，获取控制点的地面测量坐标 X_t, Y_t, Z_t ，并转化成地面摄影测量坐标 X_p, Y_p, Z_p 。

(2) 量测控制点的像点坐标：利用立体坐标量测仪量测控制点的像片框标坐标，并经像主点坐标改正，得到像点坐标 x, y 。

(3) 确定未知数的初始值：在竖直摄影情况下，角元素的初始值为 0，即 $\varphi_0 = \omega_0 = \kappa_0 = 0$ ；线元素中， $Z_{s0} = H = mf$ ； X_{s0}, Y_{s0} 的取值可用四个角上控制点坐标的平均值，即

$$X_{s0} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_{pi}, Y_{s0} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 Y_{pi}$$

(4) 计算旋转矩阵 R：利用角元素的近似值按式 (2-5) 计算方向余弦值，组成 R 阵。

(5) 逐点计算像点坐标的近似值：利用未知数的近似值按共线方程式 (2-11) 计算控制点像点坐标的近似值 $(x), (y)$ 。

(6) 组成误差方程式：按式 (2-20a)、式 (2-20b) 和式 (2-23) 逐点计算误差方程式的系数和常数项。

(7) 组成法方程式：计算法方程的系数矩阵 $A^T A$ 与常数项 $A^T L$ 。

(8) 解求外方位元素：根据法方程，按式 (2-25) 解求外方位元素改正数，并与相应的近似值求和，得到外方位元素新的近似值。

(9) 检查计算是否收敛：将求得的外方位元素的改正数与规定的限差比较，小于限差则计算终止；否则用新的近似值重复步骤 (4) —— (8) 的计算，直到满足要求为止。

4、空间后方交会的精度

估算各未知数的精度可以通过法方程系数矩阵求逆的方法，解出其相应的权倒数，按下式计算未知数的中误差：

$$m_i = m_0 \sqrt{Q_{ii}} \quad (2-27)$$

式中， m_0 称为单位权中误差，计算公式为

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{2n-6}} \quad (2-28)$$

这里， n 表示控制点的总数。

5.3 精度验证

通过模拟实验来验证上述测量方法和固连修正相机抗扰动测量方法的有效性。模拟实验进行多组，分别考查未振动时、受振动而未做修正时和对所受振动做了修正后的测量结果。

在实验室采用 4 台 SA1.1 高速相机两两固连平行测量的方式对模拟运动的炮管和标尺进行无振动和有振动测量。测量时人为施加振动，即在拍摄时拍打一像机使其产生振动。由于实验室不能给出目标体运动参数的真值，只能在测量视场内放置有标记的标尺作为真值，观察测量的精度。图 4 为固连的平行像机，图 5 为测试现场，图 6 为几种标尺。



图 4 固连的平行像机

图 5 仿真实验现场

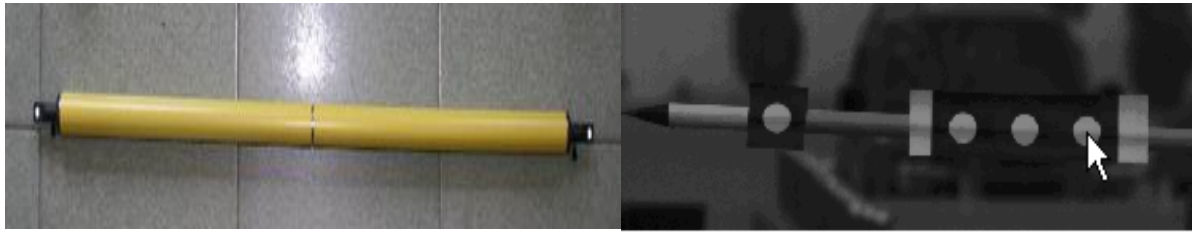


图 6 两种标尺

测量结果如表 1。

表 1 测量结果

真值	目标位置误差(毫米)						
	335.000 (标准尺)	981.0	981.0	981.0	981.0	981.0	1940.982 (标准尺)
未振动测量	-0.26	-1. 5	-1. 2	-1. 1	-1. 1	-1. 3	-0.23
振动 不修正测量	-10.8	-8. 1	-6. 2	-9. 3	-6. 4	-8. 8	-6.7
振动 修正测量	-1.6	-1. 2	-0. 8	1.5	0.3	1.3	-0.8

可见,在测量系统参数受扰动后,不修正时的测量误差已较为显著;修正后仍得到了与测量系统参数不受扰动时精度相当的目标位置的测量结果。