

成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）

一、选择题：每小题 10 分，共 40 分。在每小题的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(x-2)}{x-2} =$ ()

- A. 1 B. $\cos 1$ C. 0 D. π

答案：B

解析： $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(x-2)}{x-2} = \frac{\cos(3-2)}{3-2} = \cos 1$

2. 设函数 $y = x^2 + 1$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ ()

- A. $\frac{1}{3}x^3$ B. x^2 C. $2x$ D. $\frac{x}{2}$

答案：C

3. 设函数 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) =$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. 1

答案：A

解析： $f'(x) = -\sin x$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$

4. 下列区间为函数 $f(x) = \sin x$ 的单调增区间的是 ()

- A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ D. $(0, 2\pi)$

答案：A

5. $\int x^2 dx =$ ()

- A. $3x^3 + C$ B. $x^3 + C$ C. $\frac{x^3}{3} + C$ D. $\frac{x}{2} + C$

答案: C

解析: 由基本积分公式 $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$ 可得

6. $\int \frac{1}{1+x} dx = (\quad)$

- A. $e^{1+x} + C$ B. $\frac{1}{1+x} + C$ C. $x + C$ D. $\ln|1+x| + C$

答案: D

解析: $\int \frac{1}{1+x} dx = \int \frac{1}{1+x} d(1+x) = \ln|1+x| + C$

7. 设函数 $z = \ln(x+y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = (\quad)$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\ln 2$ D. 1

答案: B

解析: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$, 将 $x=1, y=1$ 代入, $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$

8. 曲线 $y = \sqrt{4-x^2}$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积为 ()

- A. 2 B. 4 C. 2π D. 4π

答案: C

解析: 画图可知此图形是以坐标原点为圆心, 半径为 2 且位于 x 轴上方的半圆, 也可用定积分的几何意义来做

9. 设函数 $z = e^x + y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\quad)$

- A. $2y$ B. $e^x + 2y$ C. $e^x + y^2$ D. e^x

答案: D

解析: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x$

10. 设事件 A, B 互不相容, $P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$, 则 $P(A+B)=$ ()

A. 0.44 B. 0.5 C. 0.1 D. 0.06

答案: B

解析: 因为 A, B 互不相容, 所以 $P(AB)=0$, $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5$

二、填空题: 每小题 4 分, 共 40 分.

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2}{x^2-3} =$ _____.

答案: -2

解析: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2}{x^2-3} = \frac{1^2+1+2}{1^2-3} = -2$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} =$ _____.

答案: $\frac{2}{3}$

解析: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} \stackrel{\sin 2x \text{ 和 } 2x \text{ 等价无穷小替换}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ a+x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ _____.

答案: 1

解析: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a + x = a$, $\therefore a = 1$

14. 曲线 $y=x^3+3x$ 的拐点坐标为 _____.

答案: (0, 0)

解析: $y' = 3x^2 + 3$, $y'' = 6x = 0$, $x = 0$, 将 $x = 0$ 代入 y , $y = 0$, 所以拐点为 (0,0)

15. 设函数 $f(x) = \cos x$, 则 $f''(x) =$ _____.

答案: $-\cos x$

解析: $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$

16. 曲线 $y = \sin(x+1)$ 在点 $(-1, 0)$ 处的切线斜率为_____.

答案: 1

解析: $y' = \cos(x+1)$, $k = y'|_{x=-1} = \cos 0 = 1$

17. $\int 2xe^{x^2} dx =$ _____.

答案: $e^{x^2} + C$

解析: $\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C$

18. $\int_0^1 \cos x dx =$ _____.

答案: $\sin 1$

解析: $\int_0^1 \cos x dx = \sin x \Big|_0^1 = \sin 1 - \sin 0 = \sin 1$

19. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ _____.

答案: 1

解析: $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x} d(-x) = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = 1$

20. 设函数 $z = x^3 e^y$, 则全微分 $dz =$ _____.

答案: $3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy$

解析: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 e^y$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

三、解答题: 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。

21. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

答案: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$

22. 计算 $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

答案: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

23. 计算 $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

答案: $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

24. 计算 $\int x \cos x dx$.

解析: $\int x \cos x dx = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

25. 已知某篮球运动员每次投篮投中的概率是 0.9, 记 X 为他两次独立投篮投中的次数.

(1) 求 X 的概率分布

(2) 求 X 的数学期望 EX

解析: (1) x 可能的取值是 0, 1, 2

$$P(x=0) = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

$$P(x=1) = 2 \times 0.9 \times 0.1 = 0.18$$

$$P(x=2) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

因此 x 的概率分布为

0	1	2
0.01	0.18	0.81

(2) 数学期望 $EX = 0 \times 0.01 + 1 \times 0.18 + 2 \times 0.81 = 1.8$

26. 求函数 $f(x) = x^3 - 3x - 2$ 的单调区间和极值.

解析: $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$f(x)$	$\uparrow$	极大值 0	$\downarrow$	极小值 -4	$\uparrow$
--------	------------	-------	--------------	--------	------------

因此 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -1)$; 单调减区间为 $(-1, 1)$

$f(x)$ 极大值为 $f(-1)=0$, 极小值为 $f(1)=-4$

27. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2x$:

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积 S ;

(2) 求(1)中平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

解析: (1) 由 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases}$ 得交点坐标为 $(0,0), (2,0)$

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \quad (2)$$

$$V = \int_0^2 \pi (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}$$

28. 求二元函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$ 的极值. (2012 年)

解析: $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x \\ f'_y(x, y) = 2y + 2 \end{cases}$ 令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, -1)$

因为 $f''_{xx}(x, y) = 2, f''_{xy}(x, y) = 0, f''_{yy}(x, y) = 2$

所以 $A = f''_{xx}(0, -1) = 2, B = f''_{xy}(0, -1) = 0, C = f''_{yy}(0, -1) = 2$

由于 $A > 0$ 且 $B^2 - C < 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, -1)$ 处取得极小值, 极小值 $f(0, -1) = -1$