

2017 年下半年中小学教师资格考试数学

学科知识与教学能力试题（高级中学）参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D。解析：方法一：矩阵经过初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \text{所以矩阵 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{的秩是 3.}$$

方法二：由于 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ ，所以矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 满秩，即秩为 3。

2. 【答案】A。解析：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ ，则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 的等价无穷小量。

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ，所以当 $x \rightarrow x_0$ 时，与 $x-x_0$ 是等价无穷小的为 $\sin(x-x_0)$ 。其他三项中的函数与 $x-x_0$ 的比，在 $x \rightarrow x_0$ 时极限都不等于 1。

3. 【答案】D。解析：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 条件收敛。可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 为交错级数，由莱布尼茨判别法可知此级数收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 条件收敛。其他三个级数， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛。

4. 【答案】C。解析：①错误，①未强调此常数要大于两定点之间的距离，正确的说法是：平面内到两个定点的距离之和等于常数（大于两定点间的距离）的动点轨迹是椭圆。②正确，“平面内到定直线的距离和定直线外一点距离之比大于 1 的常数的动点轨迹是椭圆”的说法等价于椭圆的第二定义：平面内到定点的距离和到定直线的距离之比是大于 0 且小于 1 的常数的动点轨迹是椭圆。③正确，这是椭圆的光学性质，即从椭圆的一个焦点发出的射线（光线），经椭圆反射后通过椭圆另一个焦点。④错误，平面与圆柱面的截线有三种：a. 当平面与圆柱面的母线垂直时，截线是圆；b. 当平面与圆柱面的母线相交但不垂直时，截线是椭圆；c. 当平面与圆柱面的母线平行时，截线是一条直线或两条平行的直线。因此题干中关于椭圆的论述正确的个数是 2 个。

5. 【答案】B。解析：二次型正定的充要条件是它对应的矩阵的顺序主子式全大于零。对四个选项的二次型所对应的矩阵逐一验证即可。下面只给出 B 选项中二次型的验证过程。

二次型 $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 5x_2^2 + x_3^2$ 所对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ，其一阶顺序主子式 $1 > 0$ ，二

阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0$ ，三阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{4} > 0$ ，所以 B 选项中二次型正定。

6. 【答案】B。解析：由于随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则随机变量 $Y = 2X - 3$ 的均值为 $2\mu - 3$ ，方差为 $4\sigma^2$ ，故 Y 服从的分布是 $N(2\mu - 3, 4\sigma^2)$ 。

7. 【答案】A。解析：交叉关系，概念 a 和概念 b，如果有的 a 是 b，有的 a 不是 b，并且有的 b 是 a，有的 b 不是 a，那么 a 和 b 这两个概念之间就是交叉关系。题干中的“等差数列”和“等比数列”概念之间的关系是交叉关系，这是因为公比为 1 的等比数列也是公差为 0 的等差数列，而只有这一种情形下两个概念有交叉。

同一关系指两个概念间内涵不同、外延完全相同的关系。如“等边三角形”和“等角三角形”。

属种关系指一个概念的部分外延与另一个概念的全部外延重合的关系，其中，外延大的概念叫属概念，外延小的概念叫种概念。如“平行四边形”和“矩形”。

矛盾关系是在同一个属概念下的两个种概念的外延互相排斥，其相加之和等于该属概念的外延。如对实数这个属概念而言，有理数和无理数这两个概念之间的关系就是矛盾关系。

8. 【答案】C。解析：集合是属于必修 1 的内容，三角函数、平面向量是属于必修 4 的内容，导数及其应用是属于选修 1-1 或选修 2-2 的内容，空间向量是属于选修 2-1 的内容。所以属于高中数学必修课程的内容有 3 个。

二、简答题

9. 【参考答案】

(1) 因为 $V_3 = \{t_1\eta_1 + t_2\eta_2 | t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \eta_1 \in V_1, \eta_2 \in V_2\}$ ，由题意可得

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 α_1, α_2 线性无关, $\dim(V_3) = 2$ 。

(2) 由题(1)可知 α_1, α_2 为 V_3 的一组基, 所以对 α_1, α_2 进行 Schmidt 正交化, 可得

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 2, 1), \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right),$$

对 β_1, β_2 单位化, 则可得 V_3 的一组标准正交基

$$\gamma_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \gamma_2 = \left(\frac{2\sqrt{93}}{93}, -\frac{5\sqrt{93}}{93}, \frac{8\sqrt{93}}{93}\right).$$

10. 【参考答案】

根据题意可知, 所求概率

$$P = \frac{0.6 \times 0.85}{0.6 \times 0.85 + 0.4 \times 0.5} = \frac{0.51}{0.71} = \frac{51}{71}.$$

11. 【参考答案】

设 $y = x + \zeta$ 与该图形相交, 将其面积分为 S_1 和 S_2 。易知 $S_2 - S_1$ 是关于 ζ 的连续函数, 记 $F_\zeta = S_2(\zeta) - S_1(\zeta)$, 可知 $F_{\max} = S$ (S 为封闭曲线面积), $F_{\min} = -S$, 由连续函数介值定理知, 必存在实数 ζ , 使 $F_\zeta(\zeta) = 0$, 即 $S_2(\zeta) = S_1(\zeta)$, 即直线 $y = x + \zeta$ 平分该图形的面积。

12. 【参考答案】

平行四边形的定义: 两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形。它的定义方式是属概念加种差定义法, 其中属概念是四边形, 种差是两组对边分别平行。

实数的定义: 有理数和无理数统称实数。它的定义方式是揭示外延定义法。

13. 【参考答案】

向量的数量积运算与实数乘法运算最明显的区别是向量数量积运算不仅涉及向量的长度, 还涉及向量的方向。向量 α 和 β 的数量积为 $\alpha\beta = (\alpha)(\beta)\langle\alpha, \beta\rangle$ 。

向量的数量积运算与实数乘法运算虽然在运算过程中均满足运算律: 交换律、分配律且运算结果均为实数, 但实数的乘法运算满足消去律, 向量的数量积则不满足消去律。在实数乘法运算中若 $a \neq 0$ 且 $a b = 0$, 则 $b = 0$ 。但在向量数量积运算中若 $\alpha \neq 0$, 且 $\alpha\beta = 0$, 则 $\beta = 0$ 或 $\alpha \perp \beta$ 。

三、解答题

14. 【参考答案】

(1) 由题意知, 点 $P(1, 3)$ 在椭圆上。椭圆左右两边求导得: $\frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{12} = 0$, 即 $yy' = -\frac{6x}{2y} = -\frac{3x}{y}$ 。将 $x=1, y=3$ 代入, 得 $y' = -1$, 所以切线方程为 $y = -x + 4$ 。该切线分别交 x 轴和 y 轴于点 A 和点 B , 所以可得 $A(4, 0), B(0, 4)$ 。线段 AB 绕 x 轴旋转一周得旋转曲面 S , 曲面 S 的方程为

$$\sqrt{y^2 + z^2} = -x + 4, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

(2) 求曲面 S 与平面 $x=0$ 所围成立体的体积有两种方法:

①利用旋转体体积公式有,

$$V = \pi \int_0^4 (4-x)^2 dx = -\frac{1}{3}\pi(4-x)^3 \Big|_0^4 = 0 - \left(-\frac{64\pi}{3}\right) = \frac{64\pi}{3}.$$

②根据几何性质, 线段 AB 绕 x 轴旋转一周得到的曲面和平面 $x=0$ 所围成立体是底面半径 $r=4$, 高 $h=4$ 的圆锥体, 根据圆锥的体积公式, 得

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 4^3 = \frac{64}{3}\pi.$$

四、论述题

15. 【参考答案】

(1) ①数学史知识的渗透

学生在学习高中数学导数知识的时候, 不同于在小学就有所接触的方程等知识, 导数是一个全新的概念。因此, 学生对于导数的历史比较感兴趣, 教师可以利用这一点, 对学生进行数学史知识的渗透, 告诉学生导数的由来、发展和在实际生活、工作中的作用。这样就可以调动学生积极性, 撤去导数的枯燥乏味, 使之变得活泛、有趣。

②数学思想方法的渗透

a. 极限思想。导数及其应用这部分知识主要从函数的连续性、导数的概念、导数的计算等方面渗透极限思想。

b. 数形结合思想。数形结合在导数及其应用部分的主要表现是对函数图像的分析与求解。函数是导数的主要研究对象之一, 研究函数的性质经常用到数形结合思想。在导数及其应用的教学中可以很自然地渗透数形结合思想。

③数学思维方式的渗透

在“导数”部分主要的数学思维方式有两种: 观察法和归纳法。

导数及其应用部分主要培养学生的观察能力。人教版教材利用三个不同维度的观察使得学生在导数的概念、导数的运算、导数的应用之间关系的思考。

归纳法是从特殊到一般再到特殊的过程, 在人教版教材中主要体现在当 Δx 趋于 0 的计算。

(2) ①有利于激发学生的学习兴趣

数学文化给学生带来的不仅仅是数学命题、数学方法、数学问题和数学语, 还包括数学思想、数学意识、数学精神等。在教学中可以适当地对学生进行数学文化的教育, 如通过数学家的故事, 数学问题的发现等内容的介绍来激发学生的学习兴趣。

②有利于培养学生的创新意识和探索精神

新一轮数学改革的理念中，强调培养学生的创新意识和探索精神。培养学生的数学思维能力，也是当代数学教育改革的核心问题之一。在数学文化中数学历史事件、历史过程、历史故事都能够激发起学生的创新意识，培养学生的探索精神。

③有利于发展学生的数学应用意识

数学文化的意义不仅在于知识本身和它的内涵，还在于它的应用价值。数学源于生活，其理论的核心部分都是在人类社会的生产、生活实践中发展起来的。因此，教学中应当有意识地结合学生已有的知识结构，加强数学与实际生活的联系，将数学知识生活化，让学生感受到生活的各个领域中都要用到数学，从而更深切地感受数学文化的价值。

五、案例分析题

16. 【参考答案】

(1) 甲教师引入的设计思路是温故知新，带着学生回忆初中在已知数系中遇到解决不了的问题时，处理方法是引入新数来扩充数集。类比得出高中遇到实数范围内解决不了的问题，也应该想到引入新数的方法来扩充数集，并解决问题，进而引入新课。这样做能够让学生通过复习旧知识来获得解决问题的方法，对学生解决问题的能力有一定的提高。但该教师的设计方案有些缺乏趣味性。

教师乙，采用数学史导入新课。这种导入既丰富了教材中的素材，又丰富了教学内容，同时激发了学生兴趣，调动了学生学习复数的积极性，引发了学生的数学思考。能使学生认识数学、理解数学，最终学好数学，体会到数学来源于生活，并应用于生活。有利于激活学生的思维，使学习变成一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。

(2) 将复数的代数形式 $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbf{R}$) 表示成 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的形式叫复数的三角形式表示法，其中 $(z) = r$, θ 为复数 z 的辐角。引进复数三角表示法的依据是复数的几何意义和三角函数的定义，它是数形结合的产物，有了它就可借助三角知识处理复数的一些问题。

引入复数三角形式的一个重要的原因在于用三角形式进行乘除法、乘方、开方相对于代数形式较为简单。如，两复数相乘等于它们的模相乘而辐角相加，形如 $z_1 z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)] \cdot [r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

复数的三角表示法也为以后引入更加本质的欧拉定理及统一指数和三角函数等更加深入的知识做好理论铺垫。

六、教学设计题

17. 【参考答案】

(1) 实例：假设某地区有高中生 8000 人，初中生 12000 人，小学生 18000 人。此地区教育部

为了了解本地区中小学生的近视情况及其形成原因，要从本地区的中小学生中抽取 1% 的学生进行调查。你认为应当怎样抽取样本？

分层抽样的实施步骤如下：

①根据已经掌握的信息，将总体分成互不相交的层；

②根据总体中的个数 N 和样本容量 n 计算抽样比 $k = \frac{n}{N}$ ；

③确定第 i 层应该抽取的个体数目 $n_i = N_i \times k$ (N_i 为第 i 层所包含的个体数)，使得各 n_i 之和为 n ；

④各个层中，按步骤③中确定的数目在各层中随机抽取个体，合在一起得到容量为 n 的样本。

设计意图：通过对实例的探究，引导学生体会：①不同的年龄阶段，影响近视的因素是不一样的，利用简单的随机抽样不具有代表性，所以调查者应利用事先掌握好的各种信息对总体进行分层，这可以保证每一层一定有个体被抽到，从而使样本更具有代表性；②对小学、初中、高中抽样个数的探究，体会含有个体多的层，在样本中的代表也应该多，即样本从该层中取的个体数也应该多，这样的样本才更具有代表性。

在整个的探究过程中，根据简单随机抽样和系统抽样的基础，提升学生对分层抽样的理解，感受分层抽样的必要性以及它的特点。

通过实例以及问题的引导，提高学生对分层抽样步骤的理解，提升对分层抽样适用范围的理解。

(2) ①简单随机抽样：

优点：操作简单易行；

缺点：适合总体个数较少，当总体个数较多时，不快捷。

适用范围：总体的个数不多时。

②系统抽样：

优点：简单易行；当对总体结构有了一定的了解时，充分利用已有信息对总体中的个体进行排队后再抽样，可提高抽样效率；当总体中的个体存在一种自然编号（如生产线上产品的质量监控）时，便于试行系统抽样法。

缺点：在不了解样本总体的情况下，所抽出的样本可能有一定的偏差。

适用范围：总体个数较多时。

③分层抽样：

优点：根据总体几个部分的明显差异，按照比例进行抽取样本，样本的代表性高。

缺点：总体的几个部分差异不明显时，不适合使用分层抽样。分层抽样需要和简单随机抽样或系统抽样方法结合使用。

适用范围：总体是由差异明显的几个部分组成时，往往选用分层抽样的方法。

