

2017 年下半年中小学教师资格考试

数学学科知识与教学能力试题（高级中学）

注意事项：

1. 考试时间为 120 分钟，满分为 150 分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效，不予评分。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案字母按要求涂黑。错选、多选或未选均无分。

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为（ ）。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时，与 $x - x_0$ 是等价无穷小的为（ ）。

- A. $\sin(x - x_0)$ B. $e^{x - x_0}$
C. $(x - x_0)^2$ D. $\ln|x - x_0|$

3. 下列四个级数中条件收敛的是（ ）。

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

4. 下列关于椭圆的论述，正确的是（ ）。

- ①平面内到两个定点的距离之和等于常数的动点轨迹是椭圆
- ②平面内到定直线和直线外的定点距离之比为大于 1 的常数的动点轨迹是椭圆
- ③从椭圆的一个焦点发出的射线，经椭圆反射后通过椭圆另一个焦点
- ④平面与圆柱面的截线是椭圆

正确的个数是 ()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 下列多项式为正定二次型的是 ()。

- A. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ B. $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 5x_2^2 + x_3^2$
C. $3x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2$ D. $3x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$

6. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 设随机变量 $Y=2X-3$, 则 Y 服从的分布是 ()。

- A. $N(2\mu - 3, 2\sigma^2 - 3)$
B. $N(2\mu - 3, 4\sigma^2)$
C. $N(2\mu - 3, 4\sigma^2 + 9)$
D. $N(2\mu - 3, 4\sigma^2 - 9)$

7. “等差数列”和“等比数列”概念之间的关系是 ()。

- A. 交叉关系 B. 同一关系 C. 属种关系 D. 矛盾关系

8. 在集合、三角函数、导数及其应用、平面向量和空间向量五个内容中, 属于高中数学必修课程内容的有 ()。

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、简答题 (本大题共 5 小题, 每小题 7 分, 共 35 分)

9. 在线性空间 R^3 中, 已知向量 $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 4)$, $\alpha_3 = (0, -3, 2)$,

记 $V_1 = \{\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 \mid \lambda, \mu \in R\}$, $V_2 = \{k \alpha_3 \mid k \in R\}$ 。

令 $V_3 = \{t_1 \eta_1 + t_2 \eta_2 \mid t_1, t_2 \in R, \eta_1 \in V_1, \eta_2 \in V_2\}$ 。

(1) 求子空间 V_3 的维数; (3 分)

(2) 求子空间 V_3 的一组标准正交基。(4 分)

10. 据统计, 在参加某类职业资格考试的考生中, 有 60% 是本专业考生, 有 40% 是非本专业考生, 其中本专业考生的通过率是 85%, 非本专业的考生通过率是 50%。某位考生通过了考试, 求该

考生是本专业考生的概率。

11. 在平面有界区域内, 由连续曲线 C 围成一个封闭图形。证明: 存在实数 ζ 使直线 $y = x + \zeta$ 平分该图形的面积。

12. 给出“平行四边形”和“实数”的定义, 并说明他们的定义方式。

13. 简述向量的数量积运算与实数的乘法运算的区别。

三、解答题 (本大题 1 小题, 10 分)

14. 过点 $P(1, 3)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的切线, 分别交 x 轴和 y 轴于点 A 和点 B , 将线段 AB 绕 x 轴旋转一周, 所成旋转曲面记作 S 。

(1) 在空间直角坐标系下, 写出曲面 S 的方程; (6 分)

(2) 求曲面 S 与平面 $x = 0$ 所围成立体的体积。(4 分)

四、论述题

15. 数学的产生与发展过程蕴含着丰富的数学文化。

(1) 以“导数及其应用”教学为例，说明在数学教学中如何渗透数学文化；(6分)

(2) 阐述数学文化对学生数学学习的作用。(9分)

五、案例分析题

16. 案例：

下列是两位教师“复数概念”引入的教学片段：

【教师甲】

为了解决 $x^2 - 2 = 0$ 在有理数集中无解，以及单位正方形对角线的度量等问题，在初中，把有理数集扩充到了实数集。

$x^2 + 1 = 0$ 在实数集中有解吗？类比初中的做法，我们如何做呢？看来，又需要扩充数系。数学家引入了 i ，使 i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的一个根，即使 $i^2 = -1$ ，把这个新数 i 添加到实数集中去，就会得到一个新数集，记作 A ，那么方程 $x^2 + 1 = 0$ 在 A 中就有解 $x = i$ 了。

这样我们就引入了一个新数。

【教师乙】

16世纪，意大利数学家卡尔达诺在解决“求两个数，使其和为10，积为40”时，认为这两个数是“ $5 + \sqrt{-15}$ ”和“ $5 - \sqrt{-15}$ ”这是因为：

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10,$$

$$(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) = 40.$$

看来 $\sqrt{-15}$ 也是一个存在的数，从而 $\sqrt{-1}$ 是一个存在的数。数学家将 $\sqrt{-1}$ 记为 i ，从而 $\sqrt{-15} = \sqrt{15}i$ 这样我们就引入了一个新数。

.....

这节课我们学习了复数的表达形式 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)。当然，复数还有其他表示法，在后续的学习中我们会学习到。

问题：

- (1) 请分析这两位教师教学引入片段的特点；(12分)
- (2) 复数还有三角表示法，请简述三角表示法的意义。(8分)

六、教学设计题（本大题 1 小题，30 分）

17. 某位教师设计了高中数学必修内容“分层抽样”的教学目标为：

- ①通过实例，了解分层抽样的特点、适用范围及分层抽样的必要性，掌握分层抽样的操作步骤；
- ②体会分层抽样、简单随机抽样以及系统抽样的区别与联系，提升整体把握知识的能力。基于上述内容，完成下列任务：

(1) 基于教学目标①，设计一个实例，总结分层抽样的步骤，并说明设计意图；(21分)

(2) 基于教学目标②，简要说明简单随机抽样、系统抽样以及分层抽样各自特点及适用范围。(9分)