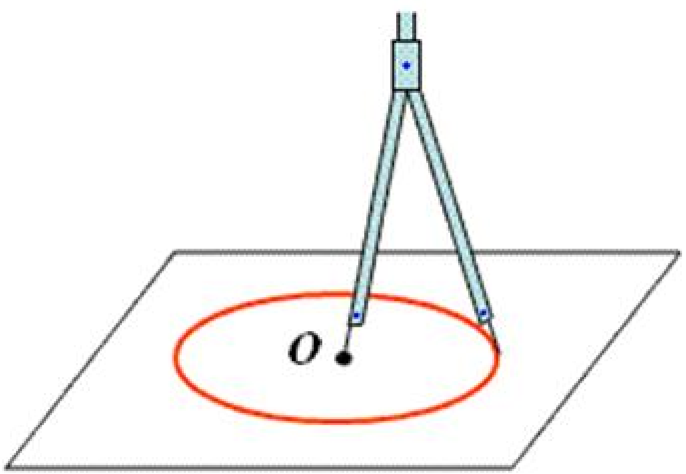
第八章　圆的标准方程

滦州市职业技术教育中心　杨猛

创设情境 兴趣导入

圆是平面内到定点的距离为定长的点的轨迹，定点叫做**圆心**，定长叫做**半径**.

如图所示，将圆规的两只脚张开一定的角度后，把其中一只脚放在固定点O，另一只脚紧贴点所在平面上，然后转动圆规一周（圆规的两只脚张开的角度不变），画出的图形就是圆.

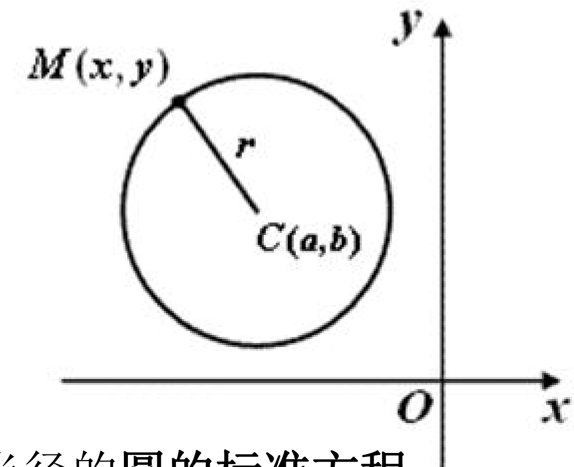


圆的标准方程

动脑思考 探索新知

下面我们在直角坐标系中研究圆的方程.

设圆心的坐标为C（a，b），半径为r，点M（x，y）为圆上的任意一点（如图），则 $|MC|=r$



由公式得 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

将上式两边平方，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

这个方程叫做以C（a，b）为圆心，r为半径的**圆的标准方程**.

特别的，当圆心为坐标原点O（0，0），半径为r，的圆的标准方程为 $x^2+y^2=r^2$

巩固知识 典型例题

例1 求以点$C(-2, 0)$为圆心，$r=3$为半径的圆的标准方程.

解 因为 $a=-2,\ b=0,\ r=3$，故所求圆的标准方程为

$$(x+2)^2+y^2=9.$$

例2 写出圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ 的圆心的坐标及半径.

解 方程 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

可化为 $(x-2)^2+[y-(-1)]^2=(\sqrt{5})^2$

所以 $a=2,\quad b=-1,\quad r=\sqrt{5}$

故，圆心的坐标为 $C(2,-1)$，半径为 $r=\sqrt{5}$.

运用知识 强化练习

1． 求以点$C(-1, 3)$为圆心，$r=3$为半径的圆的标准方程.

SUCCESS

$(x+1)^2+(y-3)^2=9.$

2． 写出圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心的坐标及半径.

SUCCESS

$C(-1,2)$;

$r=2.$

动脑思考 探索新知

将圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展开并整理，可得

$$x^2+y^2+(-2a)x+(-2b)y+(a^2+b^2-r^2)=0$$

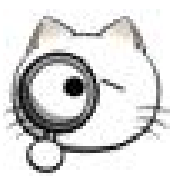
令 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$，

则 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$

这是一个二元二次方程．观察发现具有下列特点：

(1) 含 x^2 项的系数与含 y^2 项的系数都是1；

(2) 方程不含xy项．



具有这两个特点的二元二次方程一定是圆的方程吗?

动脑思考 探索新知

将方程配方整理得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程为是圆的标准方程，其圆心在 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（其中$D^2+E^2-4F>0$）

叫做**圆的一般方程**. 其中D、E、F 均为常数.

圆的一般方程

巩固知识　典型例题

例3　判断方程 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 是否为圆的方程，如果是，求出圆心的坐标和半径.

解1　将原方程左边配方，有

$$x^2+4x+2^2-2^2+y^2-6y+3^2-3^2-3=0$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4^2$$

所以方程表示圆心为(−2，3)，半径为4的一个圆.

解2　与圆的一般方程相比较，知$D=4,E=-6,F=-3$,故

$$D^2+E^2-4F=16+36-4\times(-3)=64>0$$

所以方程为圆的一般方程，由

$$\frac{D}{2}=2,\frac{E}{2}=-3,\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=4$$

知圆心坐标为(−2，3)，半径为4.

运用知识　强化练习

已知圆的方程为 $x^2+y^2-4x=0$，求圆心的坐标和半径.

$C(2,0)$;

$r=2$.

动脑思考 探索新知

观察圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，可以发现：这两个方程中各分别含有三个字母系数 a，b，r 或 D，E，F．确定了这三个字母系数，圆的方程也就确定了．因此，求圆的方程时，关键是确定字母系数 a，b，r（或 D，E，F）的值．

巩固知识 典型例题

例4 根据下面所给的条件，分别求出圆的方程：

(1) 以点(−2，5)为圆心，并且过点(3， −7)；

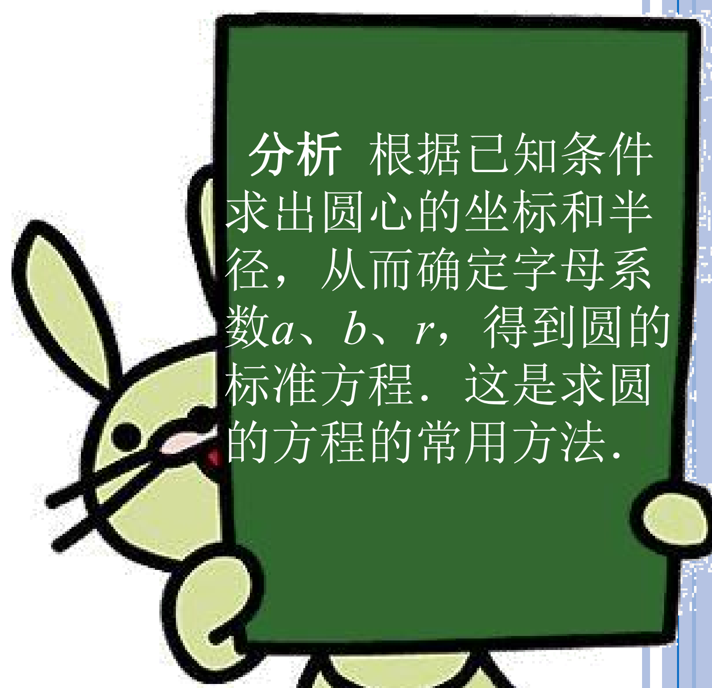
(2) 设点$A(4，3)$、$B(6， −1)$，以线段AB为直径；

(3) 应该点$P(-2，4)$、$Q(0， 2)$，并且圆心在$x+y=0$上；

解 (1) 由于点（−2，5）与点（3，− ）间的距离就是半径，

所以半径为 $r=\sqrt{(3+2)^2+(-7-5)^2}=13$

故所求方程为$(x+2)^2+(y-5)^2=169.$



巩固知识 典型例题

例4 根据下面所给的条件，分别求出圆的方程：

(1) 以点(−2，5)为圆心，并且过点(3， −7)；

(2) 设点$A(4，3)$、$B(6， −1)$，以线段AB为直径；

(3) 应该点$P(−2，4)$、$Q(0， 2)$，并且圆心在$x+y=0$上；

(2) 设所求圆的圆心为C，则C为线段AB的中点，

即 $$C\left(\frac{4+6}{2},\frac{3-1}{2}\right),$$

半径为线段AB的长度的一半，即

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(4-6)^2+(3+1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$$

故所求圆的方程为

$$(x-5)^2+(y-1)^2=5.$$

巩固知识　典型例题

例4　根据下面所给的条件，分别求出圆的方程：

(1) 以点(−2，5)为圆心，并且过点(3，　−7)；

(2) 设点A(4，3)、B (6，　−1)，以线段AB为直径；

(3) 应该点P(−2 ，4)、Q (0，　2)，并且圆心在x+y=0上；

(3) 由于圆心在直线 $x+y=0$ 上，故设圆心为$C(x_0,-x_0)$，

于是有 $$|CP|=|CQ|,$$

$$\sqrt{(x_0+2)^2+(-x_0-4)^2}=\sqrt{(x_0-0)^2+(-x_0-2)^2},$$

解得 $$x_0=-2$$

因此，圆心为(−2，2)．半径为

$$r=\sqrt{(-2-0)^2+(2-2)^2}=2,$$

故所求方程为

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4.$$

巩固知识　典型例题

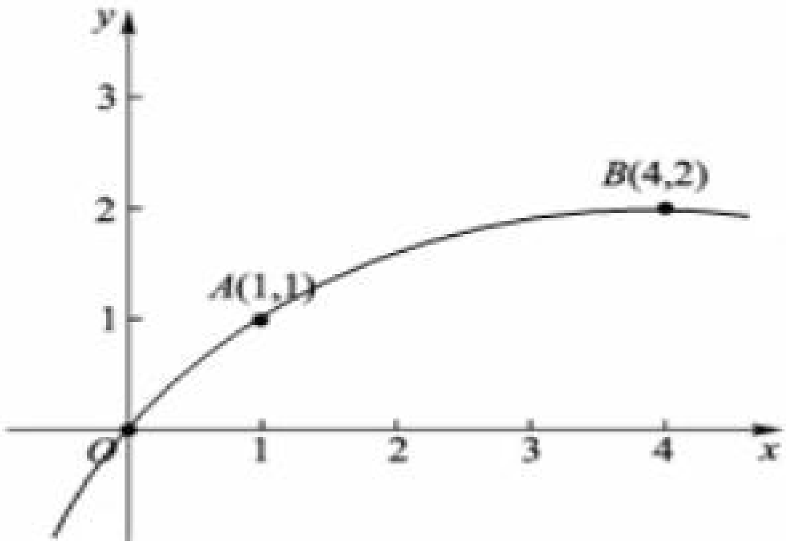
例5　求经过三点 $O(0,0)$、$A(1,1)$、$B(4,2)$ 的圆的方程．

解　设所求圆的一般方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

将点 O（0，0），A（1，1），B（4，2）的坐标分别代入方程，得

$$\begin{cases} 0^2+0^2+D\times 0+E\times 0+F=0, \\ 1^2+1^2+D\times 1+E\times 1+F=0, \\ 4^2+2^2+D\times 4+E\times 2+F=0, \end{cases}$$



解得 $D=-8$，$E=6$，$F=0$．

故所求圆的一般方程为

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

运用知识　强化练习

求经过直线$x+3y+7=0$与$3x-2y-12=0$的交点，圆心为$C(-1,1)$的圆的方程.

略.

理论升华 整体建构

1 圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

以$C(a,b)$圆心，r为半径.

2 圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

其中（D、E、F为常数且$D^2+E^2-4F>0$).

自我反思　目标检测

学习方法

学习行为

学习效果

自我反思 目标检测

判断方程 $x^2+y^2-2x-4y+8=0$ 是圆的方程吗？为什么？

SUCCESS

不是，$D^2+E^2-4F<0.$

继续探索 活动探究

- 读书部分：阅读教材相关章节
- 书面作业：教材习题8.2 A（必做）

  教材习题8.2 B（选做）
- 实践调查：任意的二元二次方程

  试判断是否是圆的方程.