目 录

第一章　函数、极限、连续

习题 1.1

1、用区间表示下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{3x+2}$

【答案】：$3x+2\geq 0, x\geq -\frac{2}{3}$，所以定义域为$[-\frac{2}{3},+\infty)$

（2）$y=\frac{1}{1-x^2}$

【答案】：$1-x^2\neq 0, x\neq \pm 1$，所以定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

（3）$y=\lg(5-x)+\arcsin\frac{x-1}{6}$

【答案】：$\begin{cases}5-x>0\\ \left|\frac{x-1}{6}\right|\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<5\\ -5\leq x\leq 7\end{cases}$，所以定义域为$[-5,5)$

（4）$y=\begin{cases}x, & -1\leq x<0\\ 1+x, & 0<x\end{cases}$

【答案】：分段函数的定义域为各分段的并集，所以定义域为$[-1,0)\cup(0,+\infty)$

2、下列各题中，函数$f(x)$与$g(x)$是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x+1}, g(x)=x+1$

【答案】：不相同。定义域不同，函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，而函数$g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$

（2）$f(x)=\sin x, g(x)=\sin\sqrt{x^2}$

【答案】：不相同。对应法则不同，函数$g(x)=\begin{cases}\sin x(x\geq 0)\\ \sin(-x)=-\sin x(x<0)\end{cases}\neq f(x)$

（3）$f(x)=\sqrt[3]{x^4}, g(x)=x\sqrt[3]{x}$

【答案】：相同。定义域和对应法则均相同

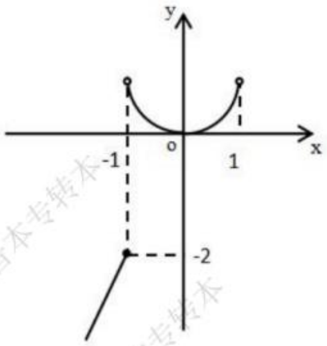
（4）$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$

【答案】：不相同。定义域不同，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

3、设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le -1\\ x^2, & -1<x\le 1\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(1)$，$f(2)$；并做出 $y=f(x)$ 的图形.

【答案】：$f(-2)=-4, f(-1)=-2, f(1)=1, f(2)$ 不存在

图像如右：



4、确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$

【答案】：偶函数。奇函数除以奇函数，为偶函数。

(2) $y=\sin x+\cos x$

【答案】：非奇非偶函数。

(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

【答案】：奇函数。$f(x)+f(-x)=0$

(4) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

【答案】：奇函数。$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1}), f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})$，

$f(x)+f(-x)=\lg[(-x+\sqrt{x^2+1})\cdot(-x+\sqrt{x^2+1})]=\lg 1=0$

5、求下列函数的反函数：

（1） $y=2^x+1$

【答案】：$y=2^x+1, x=\log_2(y-1)$。所以反函数 $y=\log_2(x-1)$

（2） $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

【答案】：$y=\dfrac{1+x}{1-x}, x=1-\dfrac{2}{y+1}$。所以反函数 $y=1-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}$

6、设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$

【答案】：$\cos 2x=1-2\sin^2 x$，$\therefore f(\sin x)=2-2\sin^2 x$，即 $f(x)=2-2x^2$

$\therefore f(\cos x)=2-2\cos^2 x=2\sin^2 x$

7、已知 $f(x)=x^3+1, g(x)=\sqrt{x}$，求 $(1)g(f(x));(2)f(g(x));(3)f(f(x))$

【答案】：$(1)g(f(x))=g(x^3+1)=\sqrt{x^3+1}$

$(2)f(g(x))=f(\sqrt{x})=x^{\frac{3}{2}}+1$

$(3)f(f(x))=f(x^3+1)=(x^3+1)^3+1=x^9+3x^6+3x^3+2$

8、指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin 2x$

【答案】：$y=\sin u, u=2x$

(2) $y=e^{\sin^3 x}$

【答案】：$y=e^u, u=v^3, v=\sin x$

(3) $y=\arcsin[\lg(2x+1)]$

【答案】：$y=\arcsin u, u=\lg v, v=2x+1$

9、化下列曲线的极坐标方程为直角坐标方程

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$；

【答案】：$\dfrac{y}{x}=\tan\theta=1, \therefore y=x$

(2) $\rho=2a\cos\theta$；

【答案】：根据题意，有 $\rho^2=2a\rho\cdot\cos\theta$，即 $x^2+y^2=2ax$，即 $(x-a)^2+y^2=a^2$

(3) $\rho=\dfrac{1}{1-2\cos\theta}$；

【答案】：移项得 $\rho(1-2\cos\theta)=1, \rho=2\rho\cos\theta+1$，两边平方，有 $\rho^2=(2\rho\cos\theta+1)^2$，

即 $x^2+y^2=(2x+1)^2$，有 $3x^2+4x+1=y^2$

(4) $\rho=\dfrac{1}{2\sin\theta-3\cos\theta}$

【答案】：移项得 $\rho(2\sin\theta-3\cos\theta)=1, 2\rho\sin\theta-3\rho\cos\theta=1$，即 $3x-2y+1=0$

习题 1.2

1. 观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势，并指出哪些数列有极限？极限是多少？哪些数列无极限？

（1）$x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；

【答案】：该数列有极限，且极限为0

（2）$x_n=(-1)^n$；

【答案】：该数列无极限，数列的取值无法无限的逼近某个常数。

（3）$x_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n}\\0\end{cases}$；

【答案】：该数列有极限，且极限为0

（4）$x_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$；

【答案】：该数列无极限，数列的取值无法无限的逼近某个常数。

2.已知数列$x_n=\frac{n-1}{n+1}$，估算该数列的极限A？

【答案】：该数列$\{x_n\}$有极限，且极限为0，故$A=0$

3.设$f(x)=\frac{x}{x},g(x)=\frac{|x|}{x}$, 求$f(x),g(x)$当$x\to0$时的左、右极限，并说明他们在$x\to0$时的极限是否存在。

【答案】：$f(x)=1,\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以当$x\to0$时，函数$f(x)$极限存在。

$\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=-1,\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1$，所以当$x\to0$时，函数$g(x)$极限不存在。

习题 1.3

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？并举例说明。

【答案】：不一定。例如当$x\to0$时，数列$x_n=x$和$y_n=\sin x$均为无穷小，但是有

$\lim\limits_{x\to0}=\frac{\sin x}{x}=1$，非无穷小。

2. 设函数$f(x)=x\sin x$，判断$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是否有界？$f(x)$是否为$x\to\infty$时的

无穷大量？

【答案】：因为 $y=x$ 无界，且 $|\sin x|\le 1$，故函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界的。$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在，故当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为非无穷大量。

3.求下列极限并说明理由：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$

【答案】：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=1+0=1$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}$

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$

4.说明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 是否存在？

【答案】：不存在。因为当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$，而当 $t\to\infty$ 时，$\cos t$ 无极限，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在。

习题 1.4

1. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+5}=\dfrac{1}{8}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

(5) $\lim\limits_{h\to 0}(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x})\dfrac{1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x}\cdot\dfrac{1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{(x+h)\cdot x}=-\dfrac{1}{x^2}$

(6) $\lim\limits_{t\to 1}(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{2}{1-t^2})=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1+t-2}{(1+t)(1-t)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{(1+t)(1-t)}=-\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{1+t}=-\dfrac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}(m,n\in z^+)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+C_{m-1}^1x^{m-2}+\ldots+C_{m-1}^{m-2}x+C_{m-1}^{m-1})}{(x-1)(x^{n-1}+C_{n-1}^1x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}^{n-2}x+C_{n-1}^{n-1})}=\dfrac{m}{n}$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}(a\neq 0)\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{m}\cdot x^{\frac{1}{m}-1}}{1}=\dfrac{1}{m}\sqrt[m]{a^{1-m}}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\dfrac{4}{3}$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{2(1-x)}=\lim\limits_{x\to 1}(-\dfrac{1}{2}(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}))=-2\sqrt{2}$

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1$

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{8x^3+1}}=\dfrac{1}{2}$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(\dfrac{x}{2x^2-1}-\dfrac{1}{2x+1})\right]=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\cdot\dfrac{2x^2+x-2x^2+1}{(2x^2-1)(2x+1)})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x+1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=\dfrac{1}{4}$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{(1+(n+1))\cdot(n+1)}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2}=\dfrac{1}{2}$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}$

2. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$

3. 计算下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}[0\cdot M]}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\arctan x}{x+\arctan x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\arctan x}{x}[0\cdot M]}{1+\dfrac{\arctan x}{x}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

习题 1.5

1. 计算下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan kx}{x}$ （k 为非零常数）

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{\cos kx}\cdot\dfrac{k}{kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{kx}\cdot\dfrac{k}{\cos kx}=k$

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}(\beta\neq0)$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\dfrac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\dfrac{\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

（3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

【答案】：原式 $=\dfrac{2}{5}$

（4） $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

【答案】：令 $t=x-\pi$，当 $t\to\pi$ 时，有 $t\to0$。且 $\sin x=\sin(t+\pi)=-\sin t$。

故原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\sin t}{-t}=1$

（5） $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

【答案】：令 $t=x-\pi$，当 $t\to\pi$ 时，有 $t\to 0$。且 $\sin 3x=\sin 3(t+\pi)=-\sin 3t$，$\tan 5x=\tan 5(t+\pi)=\tan 5t$。

故原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin 3t}{\tan 5t}=-\dfrac{3}{5}$

（6）$\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为非零常数）

【答案】：原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x=x$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 5x$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 5x}=\dfrac{1}{5}$

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|}$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2}}{|x|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos nx}{x^2}=-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{1}{2}n^2=\dfrac{n^2-m^2}{2}$

（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\tan x}{x^2}$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=2\cdot 1=2$

（12）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{kx}$

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x\cdot k}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x\right)^k=e^k$

（13）$\lim\limits_{t\to\infty}(1-\dfrac{1}{t})^t$

【答案】：原式$=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{-t})^{(-t)\cdot(-1)}=\left(\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{-t})^{(-t)}\right)^{-1}=e^{-1}$

（14）$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^{x}$

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-1}{1+x})^{-(1+x)\cdot\frac{x}{-(1+x)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{-1}{1+x})^{-(1+x)}\right)^{\frac{x}{-(1+x)}}$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{-1}{1+x})^{-(1+x)}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{-(1+x)}}=e^{-1}$$

（15）$\lim\limits_{y\to 0}(1-2y)^{\frac{1}{y}}$

【答案】：原式$=\lim\limits_{y\to 0}\left(1+(-2y)\right)^{\frac{1}{-2y}\cdot(-2)}=e^{-2}$

（16）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=e$

（17）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}$

【答案】：原式$\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}\cdot\ln a}{1}=\ln a$

（18）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-a^{-x}}{x}$

【答案】：原式$\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}\ln a-a^{-x}\ln a\cdot(-1)}{1}=2\ln a$

（19）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1-\ln x)}{x}$

【答案】：令$f(x)=x+1-\ln x$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}$。所以该函数在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，且$f(1)=1>0$。所以当$x\to+\infty$时，有$f(x)\to+\infty$。所以使用洛必达法则。

原式$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x+1-\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x(x+1-\ln x)}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1-\ln x+x\cdot(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-\ln x}=0$$

（20） $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3-2x}{2-2x})^{x}$

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2-2x+1}{2-2x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2-2x})^{(2-2x)\cdot\frac{x}{2-2x}}$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2-2x})^{(2-2x)}\right)^{\frac{x}{2-2x}}=\left(\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2-2x})^{(2-2x)}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2-2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

2.利用极限存在准则证明：

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1；$$

【答案】：等式左边$<\lim\limits_{n\to+\infty}(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}}_{n个})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n}=1$

等式左边$>\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$

根据夹逼准则，故该数列极限为 1。

习题 1.6

1. 当$n\to+\infty$时，$x_n=\frac{1}{n},y_n=\frac{1}{n!}$都是无穷小量，问哪一个是较高阶的无穷小？

【答案】：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}=0$，所以$y_n=\frac{1}{n!}$是较高阶的无穷小。

2. 当$x\to1$时，函数$\frac{1-x}{1+x}$和$1-x$都是无穷小，问它们是否为同阶无穷小？

【答案】：是。因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$，所以是同阶无穷小。

3.利用等价无穷小的性质，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\alpha x}{\sin\beta x}(\beta\neq 0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(mx)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}m^2$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{1}{2}x}=2$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\frac{1}{2}x^2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{2-(1+\cos x)}{x^2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

习题 1.7

1.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-A}{x-2}, x\neq 2\\ A, x=2\end{cases}$，问 A 取何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是连续的？

【答案】：$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-A}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-A}{x-2}=A$，即 $\dfrac{x^2-A}{x-2}=A, x^2-A=A(x-2)$，比较其系数有 $x^2-Ax+A=0\Rightarrow A=4$

2.求下列函数的间断点，并指出其类型，如果是可去间断点，则补充式的函数的定义使其连续。

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

【答案】：$y=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\Rightarrow x=1$ 是间断点

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2}{3}$，是可去间断点，且补充定义 $f(1)=\dfrac{2}{3}$

（2） $y = x\cos^2\dfrac{1}{x}$

【答案】：该函数在 $x=0$ 无定义， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\infty$ ，是可去间断点

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\cos^2\dfrac{1}{x}[0\cdot M]=0$ ，所以补充定义 $f(0)=0$

（3） $y=\dfrac{1}{\sin\pi x}$

【答案】：令 $\sin\pi x=0$ ，即该函数在 $x=k(k\in N)$ 无定义， $x=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin\pi x}=\infty,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sin\pi x}=\infty,\ldots$，不是可去间断点，根据间断点的分类， $x=k(k\in N)$ 是第二类（无穷）间断点。

（4） $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

【答案】：该函数在 $x=0$ 无定义， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\infty$ ，是可去间断点

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以补充定义 $f(0)=\dfrac{1}{2}$

（5） $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

【答案】：该函数在 $x=0$ 无定义， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\infty$ ，是可去间断点

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ，所以补充定义 $f(0)=e$

（6） $y=\arctan\dfrac{1}{x+1}$

【答案】：该函数在 $x=-1$ 无定义，

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\arctan\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\pi}{2}$， $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\arctan\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{\pi}{2}$，根据间断点的分类， $x=-1$ 是第一类（跳跃）间断点。

（7） $y=e^{\frac{1}{x}}$

【答案】：该函数在 $x=0$ 无定义， $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$ ，根据间断点的分类， $x=0$ 是第二类（无穷）间断点。

（8） $y=\begin{cases}x-1,x\le1\\3-x,x>1\end{cases}$

【答案】： $x=1$ 处是分段点， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ ， $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(3-x)=2$ ，根据间断点的分类， $x=1$ 是第一类（跳跃）间断点。

3．讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性，若有间断点，并判别其类型。

【答案】：当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$

当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=0$

当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=-1$

所以 $f(x)=\begin{cases}1,|x|<1\\0,|x|=1\\-1,|x|>1\end{cases}$，根据间断点的分类，$x=\pm1$ 是第一类（跳跃）间断点。

4．证明方程 $x\cdot2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根。

【答案】：令 $f(x)=x\cdot2^x-1$，则有函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数。

因为 $f(0)=-1$，$f(1)=1$，即 $f(0)\cdot f(1)<0$。

根据根的存在性定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程至少有一个小于 1 的正根。

5．证明方程 $x^5-3x=1$ 在 $[1,2]$ 内至少有一个实根。

【答案】：令 $f(x)=x^5-3x-1$，则有函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数。

因为 $f(1)=-3$，$f(2)=32-7>0$，即 $f(1)\cdot f(2)<0$。

根据根的存在性定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程在 $[1,2]$ 内至少有一个实根。

6．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，又 $f(a)\le a,f(b)\ge b$.

证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$

【答案】：令 $g(x)=f(x)-x$，则有函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数。

因为 $g(a)\le0$，$g(b)\ge0$，下面分类讨论：

若 $g(a)<0$ 且 $g(b)>0$，显然有 $g(a)\cdot g(b)<0$，根据根的存在性定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

若 $g(a)=0$ 或 $g(b)=0$，显然根在 $x=a$ 或 $x=b$ 处取到。

综上所述，存在 $\xi\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]$，使得 $f(\xi)=\xi$。

第一章　复习题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{kx}=e^2$，则 $k=$____-1____

【答案】：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2k)}=e^{(-2k)}=e^2$，所以 $k=-1$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}\right)=$（ B ）

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 5

【答案】：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}\right)=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin 3x=2$，所以选 B

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$，则常数 $a=$____2____

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{a-x}\right)^{\frac{a-x}{2x}\cdot\frac{2}{a-x}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{a-x}\right)^{\frac{a-x}{2x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{a-x}}=e^{\frac{2}{a}}=e$，所以 $a=2$

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$，则 $f(\ln 2)=$____$\dfrac{1}{2}$____

【答案】：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+(-\dfrac{x}{n})\right)^{-\frac{n}{x}\cdot(-x)}=e^{-x}$，所以 $f(\ln 2)=e^{-\ln 2}=(e^{\ln 2})^{-1}=\dfrac{1}{2}$

5. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义是极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的（ D ）.

A．充分条件　　B．必要条件　　C．充分必要条件 D．无关条件

【答案】：根据左右极限定理，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是在该点处左极限、有极限存在且相等。

6. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}$，则常数 $a=$____ln 2_____.

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha}=e^{\alpha}$，$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2=2$，即有 $e^{\alpha}=2,\alpha=\ln 2$。

7. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=1-e^{\sin x}$ 是函数 $g(x)=x$ 的（ C ）

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 同阶无穷小　　D. 等价无穷小

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}=-1$，是同阶无穷小。

8. 函数 $f(x)=\sin x$，当 $x\to 0^+$ 时，下列函数中是 $f(x)$ 的高阶无穷小的是（ C ）

A. $\tan x$　　B. $\sqrt{1-x}-1$　　C. $x^2\sin\frac{1}{x}$　　D. $e^{\sqrt{x}}-1$

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=0$，是 $f(x)$ 的高阶无穷小。

9. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中与 x 等价的是（ B ）

A. $\tan x-\sin x$　　B. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　　C. $\sqrt{1+x}-1$　　D. $1-\cos x$

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$，$\sqrt{1+x}-1$ 是 x 的等价无穷小。

10. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小与 $f(x)=x\sin^2 x$ 同阶的是（ B ）

A. $\cos x^2-1$　　B. $\sqrt{1+x^3}-1$　　C. 3^x-1　　D. $(1+x^2)^3-1$

【答案】：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{1+x^3}-1$ 是 $x\sin^2 x$ 的等价无穷小。

11. 设当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\ln(1+kx^2)$ 与 $g(x)=1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $k=$（ B ）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+kx^2)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{\frac{1}{2}x^2}=2k$，根据题意，需要是等价无穷小，故令 $2k=1$，$k=\dfrac{1}{2}$。

12. 要使函数 $f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续，则需补充定义 $f(0)=$ _e^2_

【答案】：$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2}=e^2$，根据题意，定义 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=e^2$

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$ __0__

【答案】：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}[0\cdot M]=0=f(0)=a$

14. 函数 $f(x)=\begin{cases}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}, & x<1\\ a, & x\geq1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则常数 $a=$ __$\dfrac{1}{e}$__

【答案】：$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}(1+(1-x))^{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}=\dfrac{1}{e}=f(1)=a$

15. 设 $f(x)=\dfrac{(x-2)\sin x}{|x|(x^2-4)}$，则函数 $f(x)$ 的第一类间断点的个数为（ C ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】：函数 $f(x)$ 在 $x=0, x=\pm2$ 处无定义，故考察这几个间断点处的极限情况。

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-2\cdot\sin x}{-4\cdot x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2\cdot\sin x}{-4\cdot-x}=-\dfrac{1}{2}$

所以 $x=0$ 是第一类间断点。

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\sin x}{(x+2)(x-2)|x|}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin x}{(x+2)|x|}=$ 常数，所以 $x=2$ 是第一类间断点。

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{(x-2)\sin x}{(x-2)|x|}\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$，所以$x=-2$是第二类间断点。

所以两个第一类间断点。

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x} & x<0\\ \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} & x>0\end{cases}$，则点$x=0$是函数$f(x)$的（ B ）

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 连续点

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x}=2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{2}x}=2$，是可去间断点。

17. 若是$x=1$是函数$f(x)=\frac{x^2-4x+a}{x^2-3x+2}$的可去间断点，则常数$a=$（ C ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】：$f(x)=\frac{x^2-4x+a}{(x-1)(x-2)}$，若$x=1$是可去间断点，则要求分子也有一项为$(x-1)$，观察分子系数，所以分子为$(x-1)(x-3)$，即$a=3$。

18. $x=0$是函数$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$的（ A ）

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 连续点

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}=1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}=-1$，是跳跃间断点。

19. $x=0$为函数$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x<0\\ 2, & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$的（ A ）

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 连续点

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=0, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$，是可去间断点。

20. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 的（ A ）

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 震荡间断点

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=0$，是跳跃间断点。

21. 证明：方程 $x\ln\left(1+x^2\right)=2$ 至少有一个小于 2 的正实根.

【答案】：令 $f(x)=x\cdot\ln(1+x^2)-2$，则有函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续函数。

因为 $f(0)=-2$， $f(2)=2\ln 5-2$，即 $f(0)\cdot f(2)<0$。

根据根的存在性定理，$\exists\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程至少有一个小于 2 的正实根。

22. 证明：方程 $x\ln x=3$ 在区间 $(2,3)$ 内至少有一个实根.

【答案】：令 $f(x)=x\cdot\ln x-3$，则有函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是连续函数。

因为 $f(2)=2\ln 2-3<0$， $f(3)=3\ln 3-3>0$，即 $f(2)\cdot f(3)<0$。

根据根的存在性定理，$\exists\xi\in(2,3)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程区间 $(2,3)$ 内至少有一个实根。

第二章　导数与微分

习题 2.1

1　用导数的定义求函数 $f(x)=10x^2$，在 $x=1$ 处的导数

【答案】：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{10(1+\Delta x)^2-10}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(20+10\Delta x)=20$。

2　已知 $f'(x_0)$ 存在，求下列极限

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【答案】：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{2\Delta x}=\dfrac{1}{2}\cdot$ 原式。所以，原式$=2f'(x_0)$

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

【答案】：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-$ 原式。所以，原式$=-f'(x_0)$。

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

【答案】：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=$ 原式。所以，原式$=f'(x_0)$。

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}$

【答案】：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}=-$ 原式。所以，原式$=-f'(x_0)$。

3 求下列曲线满足给定条件的切线方程和法线方程

(1) $y=\ln x$ 在点 $(e,1)$;

【答案】：$y'=\dfrac{1}{x},y'\big|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$，所以，切线斜率 $k_1=\dfrac{1}{e}$，法线斜率 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-e$。所

以切线方程为：$y=\frac{1}{e}(x-e)+1=\frac{1}{e}x$

法线方程为：$y=-e(x-e)+1=-ex+e^2+1$。

(2) $y=\cos x(0<x<2\pi)$, 切线垂直于直线 $\sqrt{2}x+y=1$.

【答案】: $y'=-\sin x$，因为切线垂直于直线 $y=-\sqrt{2}x+1$，所以，法线斜率 $k_2=-\sqrt{2}$，切线斜率 $k_1=-\frac{1}{k_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。令 $y'=-\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},(0<x<2\pi)$，解得切点横坐标 $x_1=\frac{5}{4}\pi,x_2=\frac{7}{4}\pi$，所以切点为 $(\frac{5}{4}\pi,-\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{7}{4}\pi,\frac{\sqrt{2}}{2})$。

所以切线方程为：$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{5}{4}\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{7}{4}\pi)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

对应的法线方程为：$y_1=-\sqrt{2}(x-\frac{5}{4}\pi)-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=-\sqrt{2}(x-\frac{7}{4}\pi)+\frac{\sqrt{2}}{2}$。

具体结果请自行化简。

4 讨论下列函数在指定点处的连续性与可导性

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2,x\ge 0\\ xe^x,x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处；

【答案】: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot e^x=0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，所以该函数在 $x=0$ 处是连续的。

$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x\cdot e^x)'=(x+1)\cdot e^x\Big|_{x=0}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2)'=0$，有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$，所以该函数在 $x=0$ 处不可导。

(2) $g(x)=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处；

【答案】: 该函数为初等函数，初等函数在其定义域上均连续，所以该函数在 $x=0$ 处是连续的。

$$g(x)=\begin{cases}\sin x,x\to 0^+\\ -\sin x,x\to 0^-\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)=\cos x\Big|_{x=0}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}g'(x)=-\cos x\Big|_{x=0}=-1\ne\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)$，所以该函数

在 $x=0$ 处不可导。

$$(3)h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$ 在 $x=1$ 处.

【答案】：$\lim\limits_{x\to 1}h(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1\neq h(0)$，所以该函数在 $x=0$ 处是不连续的。

$$h'(x)\big|_{x=1}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin(1+\Delta x-1)}{1+\Delta x-1}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{(\Delta x)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}=\infty$$

，导数不存在，所以该函数在 $x=0$ 处不可导。

习题 2.2

1 求下列函数的导数

$(1)\ y=2x^4-3x^3+2x-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x^3}$

【答案】：$y'=8x^3-9x^2+2+x^{-3}-6x^{-4}$。

$(2)\ y=2\tan x+\sec x-1$

【答案】：$y'=2\sec^2 x+\tan x\sec x$。

$(3)\ y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{a}{\sin a}(a\text{为常数})$

【答案】：$y'=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$。

$(4)\ y=e^x\ln x$

【答案】：$y'=\dfrac{1}{x}\cdot e^x+e^x\cdot\ln x$。

$(5)\ y=x\ln x\cos x$

【答案】：$y'=\ln x\cos x+\cos x-x\ln x\sin x$。

(6) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

【答案】: $y'=\dfrac{\sin x(1+\cos x)+(1-\cos x)\cdot\sin x}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$。

(7) $y=2^x(x\sin x+\cos x)$

【答案】: $y=2^x x\sin x+2^x\cos x$,

$y'=2^x\ln 2\cdot x\sin x+2^x\sin x+2^x x\cos x+2^x\ln 2\cdot\cos x-2^x\sin x$
$=2^x(\ln 2\cdot x\sin x+x\cos x+\ln 2\cdot\cos x)$

(8) $y=(2x+5)^6$

【答案】: $y'=6\cdot(2x+5)^5\cdot 2=12(2x+5)^5$。

(9) $y=\ln(1+x^2)$

【答案】: $y'=\dfrac{2x}{(1+x^2)}$。

(10) $y=e^{-x}\tan 3x$

【答案】: $y'=-e^{-x}\tan 3x+3e^{-x}\cdot\sec^2(3x)=e^{-x}(3\sec^2(3x)-\tan 3x)$。

(11) $y=\sqrt{1-x^2}$

【答案】: $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$。

(12) $y=\arcsin(1+2x)$

【答案】: $y'=\dfrac{2}{\sqrt{1-(1+2x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{-x-x^2}}$。

(13) $y=e^{-x}\sin 5x$

【答案】: $y'=-e^{-x}\sin 5x+e^{-x}\cos 5x\cdot 5=e^{-x}(5\cos 5x-\sin 5x)$。

(14) $y=\arccos\dfrac{2}{x}$

【答案】: $y'=-\dfrac{-\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^4-4x^2}}$。

(15) $y=\sqrt[3]{1+\cos 2x}$

【答案】: $y'=\dfrac{1}{3}(1+\cos 2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2=-\dfrac{2}{3}(1+\cos 2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sin 2x$。

(16) $y=\dfrac{\sin x^2}{\sin^2 x}$

【答案】:

$$y'=\frac{\cos x^2\cdot 2x\cdot\sin^2 x-\sin x^2\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x}=\frac{2x\cos x^2\sin x-2\sin x^2\cos x}{\sin^3 x}$$。

(17) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$

【答案】: $y'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(2x-2)=e^{-x}(-x^2+4x-5)$。

(18) $y=(\arctan\dfrac{x}{2})^2$

【答案】: $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}$。

(19) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$

【答案】:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}}}\cdot\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$

(1)若 $t^2-1>0, y'=\dfrac{-2}{t^2+1}$

(2)若 $t^2-1<0, y'=\dfrac{2}{t^2+1}$

(3)若 $t^2-1=0$, 导数不存在

(20) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

【答案】：$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$。

2　设 $f(x)$ 为可导函数，$f(x)>0$，求下列函数的导数

(1) $y=\ln f(2x)$

【答案】：$y'=\frac{1}{f(2x)}\cdot f'(2x)\cdot 2=\frac{2f'(2x)}{f(2x)}$。

(2) $y=f(e^x)e^{f(x)}$

【答案】：

$y'=f'(e^x)\cdot e^x\cdot e^{f(x)}+f(e^x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{f(x)}\left(f'(e^x)\cdot e^x+f'(x)\cdot f(e^x)\right)$。

(3) $y=f(\arctan e^x)$

【答案】：$y'=f'(\arctan e^x)\cdot\frac{e^x}{1+e^{2x}}$。

3　求函数 $y=a^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ 的导数 $(a>0)$.

【答案】：$y'=a^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\ln a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$

$$=a^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\ln a\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=a^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\ln a\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot x=\frac{x\ln a}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot a^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

习题 2.3

1 求下列函数的二阶导数

(1) $y=\frac{1}{x}+2^x$

【答案】: $y'=-\frac{1}{x^2}+2^x\cdot\ln 2, y''=2x^{-3}+2^x\cdot(\ln 2)^2$

(2)$y=\ln(1-x^2)$

【答案】: $y'=\frac{-2x}{1-x^2}$

$$y''=\frac{-2(1-x^2)-(-2x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{-2-2x^2}{(1-x^2)^2}$$

(3)$y=\sqrt{a^2-x^2}$

【答案】: $y'=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$y''=\frac{-\sqrt{a^2-x^2}-(-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}{(a^2-x^2)}$$

$$=\frac{-\sqrt{a^2-x^2}-(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x^2}{(a^2-x^2)}=-a^2\cdot(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

(4)$y=(1+x^2)\arctan x$

【答案】: $y'=2x\cdot\arctan x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\cdot\arctan x+1$

$$y''=2\cdot\left[\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right]$$

(5)$y=xe^{x^2}$

【答案】: $y'=e^{x^2}+x\cdot e^{x^2}\cdot 2x=e^{x^2}(2x^2+1)$

$$y''=e^{x^2}\cdot 2x\cdot(2x^2+1)+e^{x^2}\cdot 4x=e^{x^2}(4x^3+6x)$$

(6)$y=(\arccos x)^2$

【答案】: $y'=-2\arccos x\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$y''=-2\cdot\left[-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\arccos x\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)\right]$$

$$= -2\cdot\left[-(1-x^2)^{-1} + x\cdot\arccos x\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2(1-x^2)^{-1} - 2x\arccos x\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

【答案】: $y'=\dfrac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$y''=-\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x)=-x\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

2 设 $f(x)=(x+10)^6$ 求 $f^{(3)}(2)$

【答案】: $f'(x)=6\cdot(x+10)^5, f''(x)=30\cdot(x+10)^4, f'''(x)=120\cdot(x+10)^3$

$$f'''(2)=120\cdot(2+10)^3=207360$$

3 求下列函数在指定点的二阶导数

(1) $y=\ln(\ln x)\quad x=e^2$

【答案】: $y'=\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{(x\cdot\ln x)^2}\cdot(1+\ln x)$， $y''\big|_{x=e^2}=-\dfrac{3}{4}e^{-4}$

(2) $y=\tan\dfrac{x}{2}\qquad x=\dfrac{3\pi}{2}$

【答案】: $y'=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}, y''=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sec\dfrac{x}{2}\cdot\sec\dfrac{x}{2}\cdot\tan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot 2\sec\frac{x}{2}\cdot\sec\frac{x}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\tan\frac{x}{2}，\quad y''\big|_{x=\frac{3\pi}{2}}=-1$$

4 求下列函数的高阶导数

(1) $y=e^{-x^2}$ 求 y'''

【答案】: $y'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2x\cdot e^{-x^2}$

$$y''=-2\left[e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)\right]=-2e^{-x^2}(1-2x^2)=2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

$$y'''=2\left[e^{-x^2}\cdot(-2x)\cdot(2x^2-1)+e^{-x^2}\cdot 4x\right]$$

$$=2e^{-x^2}(-4x^3+6x)=4xe^{-x^2}(-2x^2+3)$$

(2)$y=\ln(1+x)$求$y^{(5)}$

【答案】：$y'=(1+x)^{-1}, y''=-(1+x)^{-2}$，$y'''=2(1+x)^{-3}$

$y^{(4)}=-6(1+x)^{-4}, y^{(5)}=24(1+x)^{-5}$

(3)$y=x^2\cos x$ 求$y^{(30)}$

【答案】：$y'=2x\cdot\cos x-x^2\sin x$

$y''=2[\cos x-x\sin x]-2x\sin x-x^2\cos x=2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x$

套用莱布尼兹公式，有

$y^{(n)}=x^2\cos(x+\frac{n}{2}\pi)+2nx\cos(x+\frac{n-1}{2}\pi)+n(n-1)\cos(x+\frac{n-2}{2}\pi)$

所以，$y^{(30)}=-x^2\cos x-60x\sin x+870\cos x$

(4)$y=x^3e^x$ 求$y^{(10)}$

【答案】：$y'=(3x^2+x^3)\cdot e^x, y''=(x^3+6x^2+6x)\cdot e^x$

$y''=(x^3+6x^2+6x+3x^2+12x+6)\cdot e^x=(x^3+9x^2+18x+6)\cdot e^x$

$y'''=(x^3+9x^2+18x+6+3x^2+18x+18)\cdot e^x \quad =(x^3+12x^2+36x+24)\cdot e^x$

套用莱布尼兹公式，有

$y^{(10)}=(x^3+30x^2+270x+720)\cdot e^x$

(5)$y=\frac{1}{1-x^2}$ 求$y^{(n)}$

【答案】：$y=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})$

$y'=\frac{1}{2}(-(1+x)^{-2}+(1-x)^{-2})$

$y''=\frac{1}{2}(2(1+x)^{-3}+2(1-x)^{-3})$

$y'''=\frac{1}{2}((-1)\cdot 3!(1+x)^{-4}+3!(1-x)^{-4})$

$y^{(4)}=\frac{1}{2}(4!(1+x)^{-5}+4!(1-x)^{-5})$

$\cdots$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}((-1)^n\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}+n!(1-x)^{-(n+1)})$$

(6) $y=\sin^2 x$ 求 $y^{(n)}$

【答案】：$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$， $y''=2\cos 2x$

$y'''=-4\sin 2x$， $y^{(4)}=-8\cos 2x$

...

$$y^{(n)}=2^{n-1}\cdot\sin(2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2})$$

习题 2.4

1 求由下列方程所确定的隐函数的导数

(1) $xy+e^y+y=2$

【答案】：等式两边对 x 求导，有 $y+x\cdot\frac{dy}{dx}+e^y\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y+1}$

(2) $x^3+y^3-3axy=0$

【答案】：等式两边对 x 求导，有 $3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}-3a(y+x\cdot\frac{dy}{dx})=0$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{3ay^2-3x^2}{3y^2-3ax}=\frac{ay^2-x^2}{y^2-ax}$

(3) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

【答案】：等式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x-y}{x^2}=\frac{x+y\cdot\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$

化简，有 $x\cdot\frac{dy}{dx}-y=x+y\cdot\frac{dy}{dx}$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$

$(4) 2^{x}+2y=2^{x+y}$

【答案】：等式两边对 x 求导，有 $2^{x}\cdot\ln 2+2\cdot\frac{dy}{dx}=2^{x+y}\cdot\ln 2\cdot(1+\frac{dy}{dx})$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{(2^{x}-2^{x+y})\cdot\ln 2}{2^{x+y}\cdot\ln 2-2}$

$(5) xy^{2}+e^{y}=\cos(x+y^{2})$

【答案】：等式两边对 x 求导， $y^{2}+x\cdot 2y\frac{dy}{dx}+e^{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\sin(x+y^{2})(1+2y\frac{dy}{dx})$

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{2}+\sin(x+y^{2})}{2y\sin(x+y^{2})+2xy+e^{y}}$

$(6) y=1+xe^{y}$

【答案】：等式两边对 x 求导，有 $\frac{dy}{dx}=e^{y}+x\cdot e^{y}\cdot\frac{dy}{dx}$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{y}}{1-x\cdot e^{y}}$

2 用对数求导法求下列函数的导数

$(1) y=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

【答案】：等式两边求对数，有 $\ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\cos x)$，等式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^{2}}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}$

解得 $\frac{dy}{dx}=-(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[\frac{1}{x^{2}}\cdot\ln(1+\cos x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right]$

$(2) y=(\sqrt{x})^{\ln x}$

【答案】：等式两边求对数，有 $\ln y=\frac{1}{2}\cdot\ln x\cdot\ln x=\frac{1}{2}\cdot(\ln x)^{2}$，等式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

解得 $\frac{dy}{dx}=(\sqrt{x})^{\ln x}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$

$(3) y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{x}}}$

【答案】：等式两边求对数，有 $\ln y=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\cdot\ln(1-e^{x})\right]$，等式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^{x}}{1-e^{x}}\right)$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^{x}}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\cot x+\frac{1}{2}\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)$

(4) $y=\frac{(x+5)^{2}\sqrt[3]{(x-4)}}{(x+2)^{5}\sqrt{(x+4)}}$

【答案】：等式两边求对数，有 $\ln y=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4)$，等式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+5)^{2}\sqrt[3]{(x-4)}}{(x+2)^{5}\sqrt{(x+4)}}\cdot\left[\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4}\right]$

3 求曲线 $y=x^{x^{2}}$ 在点 $(1,1)$ 处的法线方程

【答案】：对曲线 $y=x^{x^{2}}$ 等式两边求对数，有 $\ln y=x^{2}\cdot\ln x$，等式两边对 x 求导，有 $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2x\cdot\ln x+x$，解得 $\frac{dy}{dx}=y\cdot(2x\ln x+x)$

所以切线斜率 $k_{1}=\frac{dy}{dx}=y\cdot(2x\ln x+x)$，所以 $k_{1}\big|_{x=1}=1\cdot(0+1)=1$，法线斜率 $k_{2}\big|_{x=1}=-\frac{1}{k_{1}}=-1$

故法线方程为 $y=-(x-1)+1=-x+2$

4 求参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

(1) $\begin{cases}x=\sin^{2}t\\ y=\cos^{2}t\end{cases}$

【答案】：对于（1）式，两边对参数 t 求导，有 $\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t$

对于（2）式，两边对参数t求导，有$\frac{dy}{dt}=2\cos t\cdot(-\sin t)$

两式相除，有$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos t\cdot(-\sin t)}{2\sin t\cos t}=-1$

(2)$\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\y=\theta\cos\theta\end{cases}$

【答案】：对于（1）式，两边对参数θ求导，有$\frac{dx}{d\theta}=1-\sin\theta+\theta\cdot(-\cos\theta)$

对于（2）式，两边对参数θ求导，有$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\theta\cdot\sin\theta$

两式相除，有$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\theta\cdot\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$

5 在下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1)$\begin{cases}x=3e^{-t}\\y=2e^{t}\end{cases}$

【答案】：对于（1）式，两边对参数t求导，有$\frac{dx}{dt}=-3\cdot e^{-t}$

对于（2）式，两边对参数t求导，有$\frac{dy}{dt}=2e^{t}$

两式相除，有$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\cdot e^{2t}$

二阶导$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{4}{3}e^{2t}\cdot-\frac{1}{3}e^{t}=\frac{4}{9}e^{3t}$

(2)$\begin{cases}x=\cos\theta+\theta\sin\theta\\y=\sin\theta-\theta\cos\theta\end{cases}$

【答案】：对于（1）式，对θ求导，有$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$

对于（2）式，两边对参数θ求导，有$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-[\cos\theta-\theta\sin\theta]=\theta\sin\theta$

两式相除，有 $\dfrac{dy}{dx}=\tan\theta$

二阶导 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=\sec^2\theta\cdot\dfrac{1}{\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\theta}\cdot\sec^3\theta$

6 求曲线 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\sin(t+\sin t)\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程和法线方程.

【答案】：当 $t=0$ 时，有 $x=0,y=\sin 0=0$，所以切点坐标为 $(0,0)$。

对于（1）式，对 t 求导，有 $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

对于（2）式，两边对参数 t 求导，有 $\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\left(t+\sin t\right)\cdot\left(1+\cos t\right)$

两式相除，有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos(t+\sin t)\cdot(1+\cos t)}{\cos t}$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\cos 0\cdot(1+\cos 0)=2$

所以切线斜率是 $k_1=2$，法线斜率是 $k_2=-\dfrac{1}{2}$

故切线方程为 $y=2x$，法线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$

习题 2.5

1　设函数 $y=x^3$，计算在 $x=2$ 处，当 Δx 分别等于-0.1，0，0.01 时的增量 Δy 及微分 dy.

【答案】：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，$dy=f'(x)\cdot\Delta x=3x^2\cdot\Delta x$。

$\Delta y|_{\Delta x=-0.1}=1.9^3-2^3=-1.141,dy|_{\Delta x=-0.1}=-1.2$

$\Delta y\big|_{\Delta x=0}=0, dy\big|_{\Delta x=0}=0$

$\Delta y\big|_{\Delta x=0.01}=2.01^3-2^3=0.1206, dy\big|_{\Delta x=0.01}=0.12$

2 求下列函数的微分

$(1) y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$

【答案】：$dy=y'dx=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot dx$

$(2) y=\ln(\sin\frac{x}{2})$

【答案】：$dy=y'dx=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}dx$

$(3) y=x\sin 2x$

【答案】：$dy=y'dx=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$

$(4) y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

【答案】：$dy=y'dx=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{-x}{|x|\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$

$(5) y=e^{-x}\cos(3-x)$

【答案】：

$dy=y'dx=\left[-e^{-x}\cos(3-x)+e^{-x}(-\sin(3-x))\cdot(-1)\right]dx=e^{-x}\left(\sin(3-x)-\cos(3-x)\right)dx$

$(6) y=\tan^2(1+2x^2)$

【答案】：$dy=y'dx=8\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\cdot xdx$

3 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

$(1) xdx=d(\quad)$

【答案】：$dy=y'dx, xdx=d(\frac{1}{2}x^2+C)$

$(2) \frac{dx}{1+x}=d(\quad)$

【答案】：$dy=y'dx, xdx=d(\ln|1+x|+C)$

$(3)d(\quad)=\cos t\,dt$

【答案】：$dy=y'dx, d(\sin t+C)=\cos t\,dt$

$(4)d(\quad)=e^{-2x}dx$

【答案】：$dy=y'dx, d(-\frac{1}{2}e^{-2x}+C)=e^{-2x}dx$

$(5)d(\arctan e^{2x})=(\quad)de^{2x}=(\quad)dx$

【答案】：$dy=y'dx, d(\arctan e^{2x})=\frac{1}{1+e^{4x}}de^{2x}=\frac{2\cdot e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

$(6)x^2\cos(1-x^3)dx=(\quad)d(1-x^3)=d(\quad)$

【答案】：$dy=y'dx, x^2\cos(1-x^3)dx=-\frac{1}{3}\cos(1-x^3)=d(-\frac{1}{3}\sin(1-x^3)+C)$

第二章　复习题

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}=4$，则 $f'(x_0)=$（　）

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

【答案】：选 B。$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{-2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}\cdot\frac{h}{-2h}=-2$

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，则有（　）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=f'(0)$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(3x)}{x}=f'(0)$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=f'(0)$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=f'(0)$

【答案】：选 D。根据导数的定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=f'(0)$

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=1$，则 $f'(0)$ 等于（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】：选 D。$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{x}=2$

4. 设函数 $y=\arctan\sqrt{x}$，则 $dy|_{x=1}=$____________

【答案】：$\dfrac{1}{4}dx$。$dy=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$，所以 $dy|_{x=1}=\dfrac{1}{4}dx$

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=t^2+t\\ e^y+y=t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$

【答案】：$\dfrac{dx}{dt}=2t+1,\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{e^y+1}$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{(e^y+1)(2t+1)}$

6. 设函数 $y=x\left(x^2+2x+1\right)^2+e^{2x}$，则 $y^{(7)}(0)=$____________

【答案】：$y=x\cdot(x+1)^4+e^{2x}$，$y'=(x+1)^4+x\cdot 4(x+1)^3+2e^{2x}$，

$y''=4(x+1)^3+4(x+1)^3+x\cdot 12(x+1)^2+4e^{2x}=8(x+1)^3+x\cdot 12(x+1)^2+4e^{2x}$，

$y'''=24(x+1)^2+12(x+1)^2+12x\cdot 2(x+1)+8e^{2x}=36(x+1)^2+24x(x+1)+8e^{2x}$，

根据规律，有 $y^{(7)}=2^7e^{2x},y^{(7)}(0)=2^7=128$

7. 设 $y=x^x(x>0)$，则函数 y 的微分 $dy=$____________

【答案】：对该式两边求对数，有 $\ln y=x\ln x$。对于该式，左右两边求导，有 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\ln x+1$，

$y'=(\ln x+1)\cdot y$，所以 $dy=y'dx=(\ln x+1)\cdot x^x dx$

8. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\dfrac{1}{t}\\ y=t^2+2\ln t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【答案】：（1）（2）式分别对参数 t 求导，有 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$，$\frac{dy}{dt}=2t+\frac{2}{t}$，两式相除有

$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+\frac{2}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{2t^3+2t}{t^2+1}=2t$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{2t^2}{t^2+1}$。

9. 设 $y=f(\frac{1}{x})$，其中 f 具有二阶导数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$（　）

A. $-\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$　　B. $\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

C. $-\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$　　D. $\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

【答案】：$\frac{dy}{dx}=f'(\frac{1}{x})\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f''\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2-f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1}{x^4}\cdot\left(2xf'\left(\frac{1}{x}\right)+f''\left(\frac{1}{x}\right)\right)$。所以选 B。

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=(t+1)e^{2t}\\ e^y+ty=e\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

【答案】：（1）（2）式分别对参数 t 求导，有 $\frac{dx}{dt}=e^{2t}+2(t+1)e^{2t}=(2t+3)e^{2t}$，

$e^y\cdot\frac{dy}{dt}+y+t\cdot\frac{dy}{dt}=0$，即 $\frac{dy}{dt}=-\frac{y}{e^y+t}$。两式相除 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{-\frac{1}{e}}{3\cdot e^0}=-\frac{1}{3e}$

11. $y=(1-x)^x(x<1)$ 的微分 dy 为（　）

A. $(1-x)^x\left[\ln(1-x)+\frac{x}{1-x}\right]dx$　　B. $(1-x)^x\left[\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right]dx$

C. $x(1-x)^{x-1}dx$　　D. $-x(1-x)^{x-1}dx$

【答案】：对该式两边求对数，有 $\ln y=x\ln(1-x)$。对于该式，左右两边求导，有

$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}$，所以 $dy=y'dx=(1-x)^x\cdot\left(\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}\right)dx$。所以选 B。

12. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

【答案】：$f(x)=(2x+1)^{-1}$，$f'(x)=-2(2x+1)^{-2}$，$f''(x)=2^3(2x+1)^{-3}$

$=2^2\cdot 2(2x+1)^{-3}$，有 $f'''(x)=-2^3\cdot 3!(2x+1)^{-4}$，所以

$f^{(n)}(x)=(-1)^n 2^n\cdot n!(2x+1)^{-(n+1)}$。

13. 函数 $f(x)=xe^x$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$________.

【答案】：$f'(x)=xe^x+e^x=(x+1)e^x$，$f''(x)=(x+2)e^x$，...，$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

14. 设 $y=\ln(x+1)$，若 $y^{(n)}\big|_{x=0}=2018!$，则 $n=$____________

【答案】：$y'=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$，$y''=-(1+x)^{-2}$，$y'''=2(1+x)^{-3}$，

$y^{(4)}=-3!(1+x)^{-4}$，...，$y^{(n)}(x)=(n-1)!(x+1)^{-n}(-1)^{n-1}$，对比结果，有 $n=2019$

第三章 微分中值定理及导数的应用

习题 3.1

1．验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性。

【答案】：该函数在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上连续，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ 内可导。且 $f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{5\pi}{6})=-\ln 2$，端点处的函数值相等，所以满足罗尔定理的条件。

2．验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性。

【答案】：该函数该函数在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以满足拉格朗日中值定理条件。

3．证明函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总位于区间的正中间。

【答案】：显然该函数满足拉格朗日条件。设应用拉格朗日定理的区间为 $[a,b]$。根据拉格朗日定理，

至少存在一个 ξ，$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a}=p(b+a)+q$，又 $f'(\xi)=2p\xi+q$，

解得 $\xi=\frac{1}{2}(a+b)$。证明完毕。

4．设 $f(x)=(x-2)(x+1)(x+2)(x+3)$，证明 $f'(x)=0$ 有三个实根。

【答案】：$f(x)$ 为 4 次函数，根据函数求导法则有 $f'(x)$ 为 3 次函数，故 $f'(x)=0$ 最多有 3 个实根。注意到 $f(-3)=f(-2)=f(-1)=f(2)=0$，又注意到函数 $f(x)$ 在定义域上连续且可导，所以该函数在 $[-3,-2],[-2,-1],[-1,2]$ 上均满足罗尔定理。

根据罗尔定理，至少存在一个 $\xi_1\in(-3,-2)$，有 $f'(\xi_1)=0$。同理，至少存在一个 $\xi_2\in(-2,-1)$，有 $f'(\xi_2)=0$，至少存在一个 $\xi_3\in(-1,2)$，有 $f'(\xi_3)=0$。所以在区间 $(-3,2)$ 上至少有 3 个实根。

综上所述，$f'(x)=0$ 有 3 个实根。

5．证明 $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$，其中 $x\geq 1$。

【答案】：因为 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，$(\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot(\dfrac{2x}{1+x^2})'=-\dfrac{2}{1+x^2}$，所以有

$f'(x)=(2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2})'=0$，根据拉格朗日中值定理的推论，函数 $f(x)$ 的取值为常数。又因为 $f(1)=2\arctan+\arcsin\dfrac{2}{1+1}=\pi$，所以 $f(x)=\pi$ 恒成立。

6．证明下列不等式

(1) $\left|\arcsin x-\arcsin y\right|\ge\left|x-y\right|$;

【答案】：令 $f(x)=\arcsin x$，所以有 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ge1$，根据拉格朗日中值定理，至少存在一个 $\xi\in(x,y)$，有 $\arcsin x-\arcsin y=f'(\xi)\cdot(x-y)$，因为 $f'(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\ge1$，即 $\left|\arcsin x-\arcsin y\right|\ge\left|x-y\right|$。

(2) $\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+x)-\ln x<\dfrac{1}{x};x>0$

【答案】：令 $f(x)=\ln x$，所以有 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，根据拉格朗日中值定理，至少存在一个 $\xi\in(a,a+1)$，有 $f'(\xi)=\dfrac{\ln(a+1)-\ln a}{(a+1)-a}=\ln(a+1)-\ln a=\dfrac{1}{\xi}$，化简为 $\xi=\dfrac{1}{\ln(a+1)-\ln a}\in(a,a+1)$，即 $\dfrac{1}{a+1}<\ln(a+1)-\ln a<\dfrac{1}{a}$。

习题 3.2

1　用洛必达法则求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{2x}$;

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x\cdot\ln2}{2}=\dfrac{1}{2}\ln2$

（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

【答案】：原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

（3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x\cdot 2}{\cos 5x\cdot 5}=\dfrac{2}{5}$

（4） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{m\cdot x^{m-1}}{n\cdot x^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$

（5） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\tan x}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{1}=2$

（6） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2}{x^2\cdot x^2}=\dfrac{1}{2}$

（7） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1\cdot-(x+1)^{-2}}{2}=\dfrac{1}{2}$

（8） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sec x\cdot\tan x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}2\sec x=2$

（9） $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin mx}{\ln\sin x}$, $x>0$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\cos mx\cdot m}{\sin mx}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos mx\cdot\sin x\cdot m}{\sin mx\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\cdot m}{mx}=1$

（10） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{5x}$;

【答案】：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}}{5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{5}$

（11）$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；

【答案】：原式$[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{-\csc^2\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1^+}\sin^2\dfrac{\pi}{2}x=-\dfrac{2}{\pi}$

（12）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

【答案】：原式$[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot\ln x-1+x}{(1-x)\ln x}\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1}{-\ln x+\frac{1}{x}-1}\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$

（13）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$；

【答案】：原式$[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$

（14）$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$；

【答案】：原式$\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to1}e^{\ln x^{\frac{1}{x-1}}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}\ln x}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln x}{x-1}\left[\frac{0}{0}\right]}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x}}=e$

（15）$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$；

【答案】：原式$\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)[0\cdot\infty]}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(\ln t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(\ln t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t}}=1$

（16）$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

【答案】：原式$\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\tan x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{\ln x}{\cot x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\csc^2x}}=e^0=1$

2　指出下列各题应用洛必达法则时的错误.

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+x^3-2}{x^2+4x-5}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3+3x^2}{2x+4}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{12x^2+6x}{2}=9$.

【答案】：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3+3x^2}{2x+4}$并非是$\left[\dfrac{0}{0}\right]$或$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$型未定式，所以不能使用洛必达法则。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

所以极限不存在.

【答案】：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}$，对于该函数的分子分母的 x 可以约掉，变成 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$，并非是 $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 或 $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ 型未定式，所以不能使用洛必达法则。

习题 3.3

1．研究下列函数的单调性

(1) $f(x)=\arctan x-x$

【答案】：$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2}{1+x^2}\le 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减。

(2) $f(x)=x+\cos x(0\le x\le 2\pi)$

【答案】：$f'(x)=1-\sin x\le 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调递减。

2．确定下列函数的单调区间

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$

【答案】：$y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,3)$ 上单调递减。

(2) $y=2x+\dfrac{8}{x}(x>0)$

【答案】：$y'=2-\dfrac{8}{x^2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减。

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

【答案】： $y'=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\geq 0$ 恒成立，该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增。

(4) $y=2\sin x+\cos 2x, 0\leq x\leq 2\pi$

【答案】： $y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-4\sin x\cos x=2\cos x(1-2\sin x)$，令 $y'=0$，解得驻点 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{2}$，$x_3=\dfrac{\pi}{6}$，$x_4=\dfrac{5\pi}{6}$，列表判断单调性。

x	$(0,\frac{\pi}{6})$	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+
y	递增		递减		递增		递减		递增

(5) $y=xe^{-x}$

【答案】： $y'=(1-x)e^{-x}$，所以该函数在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

(6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

【答案】： $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以该函数在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减。

3．证明下列不等式

(1) $x\neq 0, e^x>1+x$

【答案】：令 $f(x)=e^x-x-1$，有 $f'(x)=e^x-1$，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。所以有 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，所以当 $x\neq 0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，即 $e^x>x+1$。

(2) $x>0, 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

【答案】：令 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+1$，有

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

所以有 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ 恒成立。

(3)$0<x<\dfrac{\pi}{2},\tan x>x-\dfrac{1}{3}x^3$

【答案】：令 $f(x)=\tan x-x+\dfrac{1}{3}x^3$，有 $f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x+x^2\geq 0$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。所以有 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$\tan x>x-\dfrac{1}{3}x^3$ 恒成立。

(4)$x>0,x>\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$

【答案】：令 $f(x)=\ln(1+x)-x$，有 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}<0$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。所以有 $f(x)_{\max}=f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$ 恒成立。

令 $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，有 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。所以有 $g(x)_{\min}=f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\dfrac{1}{2}x^3$ 恒成立。综上所述，证明完毕。

4．求下列函数的极值

(1)$y=x^4-8x^2+2$

【答案】：$y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x+2)(x-2)$，令 $y'=0$，解得驻点 $x_1=-2$，$x_2=0$，$x_3=2$，列表判断单调性。

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	递减	极小值 $f(-2)=-14$	递增	极大值 $f(0)=2$	递减	极小值 $f(2)=-14$	递增

(2)$y=2e^x+e^{-x}$

【答案】：$y'=2e^x-e^{-x}=e^{-x}(2e^{2x}-1)$，令 $y'=0$，解得驻点 $x=-\dfrac{\ln 2}{2}$，在 $(-\infty,-\dfrac{\ln 2}{2})$ 上单调递减，在 $(-\dfrac{\ln 2}{2},+\infty)$ 上单调递增。根据极值的判定方法，该函数有极小值

$y(-\frac{\ln 2}{2})=2\sqrt{2}$ 。

(3) $y=(x-2)^2(2x+1)$

【答案】: $y'=2(x-2)(2x+1)+2(x-2)^2=2(x-2)(3x-1)$，令 $y'=0$，解得驻点 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=2$，列表判断单调性。

x	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	递增	极大值 $f(\frac{1}{3})=\frac{125}{27}$	递减	极小值 $f(2)=0$	递增

(4) $y=x+\frac{1}{x}$

【答案】: $y'=1-\frac{1}{x^2}$，令 $y'=0$，解得驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$，以及 y' 在 $x=0$ 时不存在（此时函数也无定义），列表判断单调性。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	-	不存在	-	0	+
y	递增	极大值 $f(-1)=-2$	递减	不存在	递减	极小值 $f(1)=2$	递增

(5) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

【答案】: $y=1-\frac{6x}{x^2+3x+2}=1-\frac{6}{x+\frac{2}{x}+3}$，分母为对钩函数，其极值在 $x=\pm\sqrt{2}$ 处取到（也可以利用上一题的类似做法）。当 $x=-\sqrt{2}$ 时分母取得极大值，因为分母和负号，故当 $x=-\sqrt{2}$ 时函数取得极大值为 $f(-\sqrt{2})=\frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$。

同理当 $x=\sqrt{2}$ 时函数取得极小值为 $f(\sqrt{2})=\frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$。

(6) $y=x+\tan x$

【答案】：当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时， $y'=(x+\tan x)'=1+\sec^2 x>0$ 恒成立

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时， $y'=(x+\tan(x-\pi))'=1+\sec^2 x>0$ 恒成立

...

在定义域上找不到 $y'=0$ 或 y' 不存在的点。所以该函数无极值。

5．求下列函数在指定区间上的最值

(1) $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)},[-2,4]$

【答案】：令 $g(x)=x^2(x-6)$，$g'(x)=2x(x-6)+x^2=3x(x-4)$，令 $g'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=4$。所以 $g(x)$ 在 $(-2,0)$ 上递增，在 $(0,4)$ 上递减。

根据复合函数的性质，函数 $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ 也在 $(-2,0)$ 上递增，在 $(0,4)$ 上递减，即在 $x=0$ 处取得极值。

考察 $f(-2)=-4$， $f(0)=0$， $f(4)=-4$

所以最大值 $f(0)=0$，最小值 $f(-2)=f(2)=-4$。

(2) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2},[-1,\frac{1}{2}]$

【答案】： $y'=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}$，所以临界点为 $x_1=0$， $x_2=\frac{2}{5}$

考察 $f(-1)=-2$， $f(0)=0$， $f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$， $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

所以最大值 $f(0)=0$，最小值 $f(-1)=-2$。

(3) $y=2\tan x-\tan^2 x,[0,\frac{\pi}{3}]$

【答案】： $y'=2\sec^2 x-2\tan x\cdot\sec^2 x=2\sec^2 x(1-\tan x)$，所以临界点为 $x=\frac{\pi}{4}$

考察 $f(0)=0$， $f(\frac{\pi}{4})=1$， $f(\frac{\pi}{3})=2\sqrt{3}-3$

所以最大值 $f(\frac{\pi}{4})=1$，最小值 $f(0)=0$。

(4) $y=\left|2x^3-9x^2+12x\right|,[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$

【答案】：令 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$， $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

又 $f(x)=x(2x^2-9x+12), 2x^2-9x+12>0$ 恒成立

所以 $y=\begin{cases}-2x^3+9x^2-12x, x<0\\ 2x^3-9x^2+12x, x\geq 0\end{cases}$

考察 $f(-\frac{1}{4})$， $f(0)$， $f(1)$， $f(2)$， $f(\frac{5}{2})$

$f(-\frac{1}{4})=\left|3+\frac{9}{16}+\frac{2}{64}\right|$， $f(0)=0$， $f(1)=5$， $f(2)=4$， $f(\frac{5}{2})=5$

所以最大值 $f(1)=f(\frac{5}{2})=5$，最小值 $f(0)=0$。

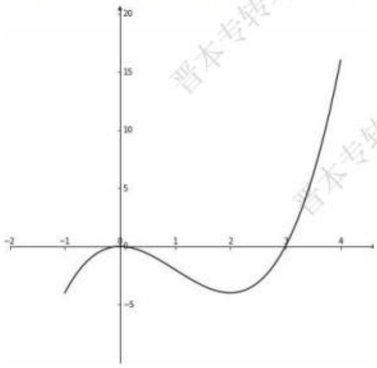
习题 3.4

讨论并画出下列函数的图像：

(1) $y=x^3-3x^2$

【答案】： $y=x^2(x-3)$， $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$。

关注函数零点、导数走向，以及部分特殊点坐标，可作出函数图像如下：



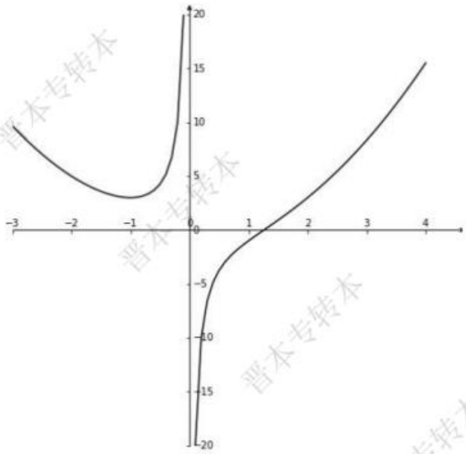
(2) $y=x^2-\frac{2}{x}$

【答案】： $y'=2x+\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}(x^3+1)$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，驻点 $x=-1$。列表判断单调性：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$

y'	$-$	0	+	+
y	递减	$f(-1)=3$	递增	递增

重点考察该函数的单调性走向，和部分函数的的函数值，可作出函数图像如下：

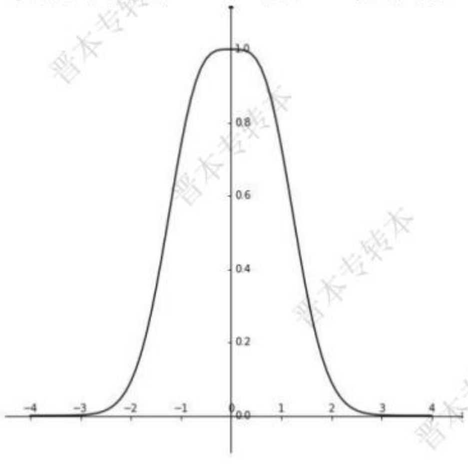


(3) $y=(1+x^2)e^{-x^2}$

【答案】：该函数取值恒正、偶函数，经过点 $(0,1)$ 。

$y'=2x\cdot e^{-x^2}+(1+x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=2x\cdot e^{-x^2}\cdot[1-1-x^2]=-2x^3\cdot e^{-x^2}$

考察其奇偶性、单调性、特殊点，可作出函数图像如下：



第三章　复习题

1．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\ln\left(1+x^2\right)}$

【答案】: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{2x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x}=4$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}+2\cos x-2}{x^{3}\ln(1+x)}$

【答案】: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}+2\cos x-2}{x^{3}\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}+2\cos x-2}{x^{4}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{2x^{3}}=\dfrac{1}{12}$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^{x}}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$

【答案】: 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{x}-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{x}-\ln(1+x)}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+xe^{x}-\dfrac{1}{1+x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+e^{x}+xe^{x}+\dfrac{1}{(1+x)^{2}}}{2}=\dfrac{3}{2}$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\arcsin x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$

【答案】: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\arcsin x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^{2}\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}}{3x^{2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^{2}}-1}{3x^{2}\sqrt{1-x^{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^{2}}{2}}{3x^{2}\sqrt{1-x^{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{6\sqrt{1-x^{2}}}=-\dfrac{1}{6}$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{\cos x}{x^{2}}\right)$

【答案】: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{\cos x}{x^{2}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\cos x\sin x}{x^{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\dfrac{1}{2}\sin 2x}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^{2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}(2x)^{2}}{3x^{2}}=\dfrac{2}{3}$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{1}{\ln(1+x^{2})}\right]$

【答案】：$\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^2\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}-2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-2x(1+x^2)}{4x^3(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x^3}{4x^3(1+x^2)}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x^2)}=-\frac{1}{2}$

7. 若点 $(1,-2)$ 是曲线 $y=ax^3-bx^2$ 的拐点，则（　　）

A. $a=1,b=3$　　B. $a=-3,b=-1$　　C. $a=-1,b=-3$　　D. $a=4,b=6$

【答案】：$y''=6ax-2b\Rightarrow y''(1)=6a-2b=0$

$y=ax^3-bx^2\Rightarrow a-b=-2$　解得 $a=1,b=3$，所以选 A

8. 设 $f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$，则函数 $f(x)$（　　）

A. 只有一个最大值　　B. 只有一个极小值

C. 既有极大值又有极小值　　D. 没有极值

【答案】：令 $f'(x)=0\Rightarrow\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0\Rightarrow x=1$　为 $f'(x)$ 的零点

$x=0$　时，为 $f(x)$ 的不可导点，所以选 C

9. 曲线 $y=\frac{2x^2+x}{x^2-3x+2}$ 的渐近线共有（　　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

【答案】：$x\to1,x\to2$ 有 2 条垂直渐近线，$x\to\infty\Rightarrow y=2$　有 1 条水平渐近线，所以 C

10. 曲线 $y=x^4-2x^3+2023$ 的凸区间为（　　）

A. $(-\infty,0],[1,+\infty)$　　B. $[0,1]$　　C. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

【答案】：$y'=4x^3-6x^2,y''=12x^2-12x$ 令　$y''=0\Rightarrow x_1=0,x_2=1$

当 $x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$时,有$y''>0$，即 $(-\infty,0],[1,+\infty)$ 为凸区间，所以选 A

11. 曲线 $y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ 的水平渐近线的方程为_______.

【答案】：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{2}{t})^{-t}\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{[(1+\frac{2}{t})^{\frac{t}{2}}]^2}=\frac{1}{e^2}\Rightarrow y=e^{-2}$.

12. 设函数 $f(x)=ax^3-9x^2+12x$ 在 $x=2$ 处取得最小值，则最大值为________

【答案】：$f'(x)=3ax^2-18x+12$

$f'(2)=12a-36+12=0 \Rightarrow a=2$

$f'(x)=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0,(x-1)(x-2)=0$

$x_1=1,x_2=2$ 令 $x=1 \Rightarrow f(x)=5$. 即最大值为 5.

13. 设函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+1)^2}$ 在点 $x=1$ 处取得极值 $-\dfrac{1}{4}$，试求：

（1）常数 a,b 的值；

（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点；

（3）曲线 $y=f(x)$ 的渐近线；

【答案】：$f'(x)=\dfrac{a(x+1)^2-(ax+b)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{-ax+a-2b}{(x+1)^3}$

（1）依题意得 $\begin{cases}\dfrac{1}{4}(a+b)=-\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{4}b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1 \\ b=0\end{cases}$

（2）$f'(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}, f''(x)=\dfrac{(x+1)^3-(x-1)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\dfrac{4-2x}{(x+1)^4}$

令 $f''(x)=0, \Rightarrow x=2$.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\cup$	拐点$(2,-\frac{2}{9})$	$\cap$

由表可知：曲线在 $(-\infty,2)$ 是凹的，在 $(2,+\infty)$ 是凸的，拐点为 $\left(2,-\dfrac{2}{9}\right)$

（3）由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{(x+1)^2}=0, \lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-x}{(x+1)^2}=\infty$

曲线有一条水平渐近线 $y=0$，一条垂直渐近线 $x=-1$

14. 函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}\sin\frac{1}{x}$ 的水平渐近线方程为________.

【答案】: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x}\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，渐近线为 $y=\frac{1}{2}$

15. 曲线 $y=\frac{x^2-6x+8}{x^2+4x}$ 的渐近线共有（　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

【答案】: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+8}{x^2+4x}=1$ 水平渐近线;　　$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-6x+8}{x^2+4x}=\infty$ 垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2-6x+8}{x^2+4x}=\infty$ 垂直渐近线　　∴ 共三条渐近线，选 C

16. 已知函数 $f(x)=ax^4+bx^3$ 在点 $x=3$ 处取得极值 -27，试求:

（1）常数 a,b 的值;

（2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点;

（3）曲线 $y=\frac{1}{f(x)}$ 的渐近线

【答案】:（1） $f'(x)=4ax^3+3bx^2$　　由题意得 $\begin{cases}81a+27b=-27\\108a+27b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^4-4x^3$

（2） $f'(x)=4x^3-12x^2, f''(x)=12x^2-24x$　　令 $f''(x)=0\Rightarrow x_1=0,x_2=2$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+		−		+
$f''(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

拐点 $(0,0),(2,-16)$　　凹区间 $(-\infty,0],[2,+\infty)$ ，凸区间 $[0,2]$

（3） $y=\frac{1}{x^4-4x^3}$　　由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4-4x^3}=0\Rightarrow$ 水平渐近线 $y=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4-4x^3}=\infty,\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x^4-4x^3}=\infty \Rightarrow$ 垂直渐近线 $x=0,x=4$

17. 证明 $x\geq -\dfrac{1}{2}$ 时，不等式 $2x^3+1\geq 3x^2$ 恒成立.

【答案】：设 $f(x)=2x^3+1-3x^2$

$f(x)=2x^3-3x^2+x-(x-1)=(x-1)^2(2x+1)$

当 $x\geq -\dfrac{1}{2}$ 时，$2x^3+1\geq 3x^2$ 结论得证。

18. 证明：当 $0<x<2$ 时，$e^x<\dfrac{2+x}{2-x}$

【答案】：令 $f(x)=2+x-(2-x)e^x$

$f'(x)=1+e^x-(2-x)e^x=1-(1-x)e^x, f''(x)=e^x-(1-x)e^x=xe^x$

当 $0<x<2$ 时 $f''(x)>0$

$f'(x)$ 单调递增，$f'(x)>f'(0)=0$

$f(x)$ 单调递增，$f(x)>f(0)=0$

$\therefore e^x<\dfrac{2+x}{2-x}$ 结论得证。

19. 证明：当 $0<x\leq\pi$ 时，$x\sin x+2\cos x<2$.

【答案】：令 $f(x)=x\sin x+2\cos x-2$

则 $f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x, f''(x)=-x\sin x$

$\because 0<x\leq\pi\ \ \therefore f''(x)<0$

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\pi]$ 单调减，$\because f'(0)=0\ \ \therefore f'(x)<f'(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 单调减，$\therefore f(x)<f(0)=0$

结论得证。

20. 证明：当 $x>0$ 时，$\ln x\leq\dfrac{2}{e}\sqrt{x}$.

【答案】：令 $F(x)=\dfrac{2}{e}\sqrt{x}-\ln x(x>0), F'(x)=\dfrac{1}{e\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-e}{ex}$

令 $F'(x)=0, x=e^2$

当 $0<x<e^2, F'(x)<0, F(x)$ 单调递减；当 $x>e^2$，$F'(x)>0, F(x)$ 单调递增；

当 $x=e^2$，$F(x)$ 取得最小值

$$x>0 \Rightarrow F(x)\geq 0 \Rightarrow \frac{2}{e}\sqrt{x}-\ln x\geq 0$$

$$\therefore \ln x\leq \frac{2}{e}\sqrt{x}$$

结论得证。

第四章　不定积分

习题 4.1

（1）$\int \frac{dx}{x^2}$

【答案】$-\frac{1}{x}+C$

【解析】$\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$.

（2）$\int \sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

【答案】$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$

【解析】$\int \sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$.

（3）$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

【答案】$2\sqrt{x}+C$

【解析】$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$.

（4）$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$.

【答案】$-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$

【解析】$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C$.

（5）$\int (x^2-1)^2dx$.

【答案】$\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+C$

【解析】$\int (x^2-1)^2dx=\int (x^4-2x^2+1)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+C$.

（6）$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$.

【答案】$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$

【解析】$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int (\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$

（7）$\int (e^x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx$.

【答案】$e^x-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

【解析】$\int (e^x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx=\int e^x dx-\int 3x^{-\frac{1}{3}}dx=e^x-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

（8）$\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$

【答案】$2(x-\arctan x)+C$

【解析】$\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx=\int \frac{2(x^2+1)-2}{1+x^2}dx=2\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx=2(x-\arctan x)+C$.

（9）$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$.

【答案】$\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$

【解析】$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx=\int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx=\int (x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$

（10）$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

【答案】$\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

【解析】$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx=\int (e^{2x}-e^x+1)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

（11）$\int e^x(2-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx$.

【答案】$2(e^x-\sqrt{x})+C$

【解析】$\int e^x(2-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}})dx=\int(2e^x-\frac{1}{\sqrt{x}})dx=2(e^x-\sqrt{x})+C$.

（12）$\int(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$.

【答案】$2\arctan x-3\arcsin x+C$

【解析】$\int(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx=2\int\frac{1}{1+x^2}dx-3\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\arctan x-3\arcsin x+C$

（13）$\int\sec x(\sec x-\tan x)dx$.

【答案】$\tan x-\sec x+C$

【解析】$\int\sec x(\sec x-\tan x)dx=\int\sec^2 xdx-\int\sec x\tan xdx=\tan x-\sec x+C$

（14）$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$.

【答案】$2\tan\frac{x}{2}-2\cot\frac{x}{2}+C=-4\cot x+C$

【解析】$\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int(\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2})dx$

$=2\tan\frac{x}{2}-2\cot\frac{x}{2}+C=-4\cot x+C$.

（15）$\int\frac{3+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$.

【答案】$4\tan x-x+C$

【解析】$\int\frac{3+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(3\sec^2 x+\tan^2 x)dx=\int(4\sec^2 x-1)dx=4\tan x-x+C$.

（16） $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx$.

【答案】 $2x - \frac{5\cdot 2^x}{3^x(\ln 2 - \ln 3)} + C$

【解析】 $\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx = \int [2 - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x]dx = 2x - \frac{5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 2x - \frac{5\cdot 2^x}{3^x(\ln 2 - \ln 3)} + C$.

（17） $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

【答案】 $\frac{1}{2}\tan x + C$

【解析】 $\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}\tan x + C$

（18） $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$

【答案】 $\sin x - \cos x + C$

【解析】 $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx = \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + C$.

（19） $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

【答案】 $\frac{1}{2}(x + \tan x) + C$

【解析】 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x + 1)dx = \frac{1}{2}(x + \tan x) + C$.

（20） $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$.

【答案】 $-\frac{1}{x} - \arctan x + C$

【解析】 $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1})dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$.

习题 4.2

1、求下列不定积分

（1）$\int \frac{1}{2x-3}dx$

【答案】$\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$

【解析】$\int \frac{1}{2x-3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-3}d(2x-3)=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$.

（2）$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

【答案】$\ln(1+e^x)+C$

【解析】$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)=\ln(1+e^x)+C$.

（3）$\int \frac{1}{(2x+1)(x-2)}dx$

【答案】$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|+C$

【解析】$\int \frac{1}{(2x+1)(x-2)}dx=\frac{1}{5}\int (\frac{1}{x-2}-\frac{2}{2x+1})dx=\frac{1}{5}[\int \frac{1}{x-2}dx-\int \frac{1}{2x+1}d(2x+1)]$

$=\frac{1}{5}[\ln|x-2|-\ln|2x+1|]+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|+C$.

（4）$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$

【答案】$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$

【解析】$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx=\frac{1}{4}\int (\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{4}(\ln|x-3|-\ln|x+1|)+C$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$.

（5）$\int \frac{1}{1+e^x}dx$

【答案】$\ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|+C$

【解析】$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{e^x(1+e^x)}d(e^x)=\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x})d(e^x)=\ln|e^x|-\ln|1+e^x|+C$

$=\ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right|+C$.

（6）$\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

【答案】$\arctan e^x+C$

【解析】$\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{1}{1+e^{2x}}de^x=\int\frac{1}{1+(e^x)^2}de^x=\arctan e^x+C$.

（7）$\int\frac{x}{1+x}dx$

【答案】$x-\ln|x+1|+C$

【解析】$\int\frac{x}{1+x}dx=\int\frac{x+1-1}{1+x}dx=\int(1-\frac{1}{1+x})dx=x-\ln|x+1|+C$.

（8）$\int e^{\sin\theta}\cos\theta d\theta$

【答案】$e^{\sin\theta}+C$

【解析】$\int e^{\sin\theta}\cos\theta d\theta=\int e^{\sin\theta}d\sin\theta=e^{\sin\theta}+C$.

（9）$\int x(x^2-3)^{\frac{7}{2}}dx$

【答案】$\frac{1}{9}(x^2-3)^{\frac{9}{2}}+C$

【解析】$\int x(x^2-3)^{\frac{7}{2}}dx=\frac{1}{2}\int(x^2-3)^{\frac{7}{2}}d(x^2-3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}(x^2-3)^{\frac{9}{2}}+C=\frac{1}{9}(x^2-3)^{\frac{9}{2}}+C$.

（10）$\int\sin(3-4x)dx$

【答案】$\frac{1}{4}\cos(3-4x)+C$

【解析】$\int\sin(3-4x)dx=-\frac{1}{4}\int\sin(3-4x)d(3-4x)=\frac{1}{4}\cos(3-4x)+C$.

（11）$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

【答案】 $-2\cos\sqrt{x}+C$

【解析】 $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2\int\sin\sqrt{x}d(\sqrt{x})=-2\cos\sqrt{x}+C$.

（12） $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$

【答案】 $\frac{1}{3}\tan 3x+C$

【解析】 $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}=\int\sec^2 3xdx=\frac{1}{3}\int\sec^2 3xd(3x)=\frac{1}{3}\tan 3x+C$.

（13） $\int x\sec^2(1-x^2)dx$

【答案】 $-\frac{1}{2}\tan(1-x^2)+C$

【解析】 $\int x\sec^2(1-x^2)dx=-\frac{1}{2}\int\sec^2(1-x^2)d(1-x^2)=-\frac{1}{2}\tan(1-x^2)+C.$

（14） $\int\tan^{11}x\cdot\sec^2 xdx$

【答案】 $\frac{1}{12}\tan^{12}x+C$

【解析】 $\int\tan^{11}x\cdot\sec^2 xdx=\int\tan^{11}xd\tan x=\frac{1}{12}\tan^{12}x+C$.

（15） $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$

【答案】 $\ln|\ln\ln x|+C$

【解析】 $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d\ln x}{\ln x\ln\ln x}=\int\frac{d\ln\ln x}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C$.

（16） $\int\frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}$

【答案】 $\ln|\arctan x|+C$

【解析】 $\int\frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}=\int\frac{d(\arctan x)}{\arctan x}=\ln|\arctan x|+C$.

（17） $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\sqrt{1+x^2}dx$

【答案】 $-\cos\sqrt{1+x^2}+C$

【解析】$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sin\sqrt{1+x^2}\,d(\sqrt{1+x^2}) = -\cos\sqrt{1+x^2} + C$.

（18）$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$

【答案】$\ln|\tan x| + C$

【解析】$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x + \int \frac{1}{\sin x}d\sin x = -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C$

$= \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\tan x| + C$.

（19）$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

【答案】$\frac{1}{2}\tan^2 x + C$

【解析】$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\int \cos^{-3} x d(\cos x) = \frac{1}{2}\sec^2 x + C_1 = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$.

（20）$\int \frac{1+e^x}{\sqrt{x+e^x}}dx$

【答案】$2\sqrt{x+e^x} + C$

【解析】$\int \frac{1+e^x}{\sqrt{x+e^x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+e^x}}d(x+e^x) = 2\sqrt{x+e^x} + C$.

（21）$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$

【答案】$\frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$

【解析】$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}d(\sin x - \cos x)$

$= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x - \cos x)$

$$=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

（22）$\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

【答案】$\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+C$

【解析】$\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx=\int\sqrt{\arcsin x}d\arcsin x=\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}+C$.

（23）$\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$.

【答案】$\frac{1}{3}\arctan x^3+C$

【解析】$\int\frac{x^2}{1+x^6}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^6}dx^3=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+(x^3)^2}d(x^3)=\frac{1}{3}\arctan x^3+C$.

（24）$\int\sec^4 x\tan^2 xdx$

【答案】$\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

【解析】$\int\sec^4 x\tan^2 xdx=\int\sec^2 x\tan^2 xd(\tan x)=\int(\tan^2 x+1)\tan^2 xd(\tan x)$

$$=\int(\tan^4 x+\tan^2 x)d(\tan x)=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$$

（25）$\int\sec^4 x\cdot\tan^3 xdx$

【答案】$\frac{1}{6}\sec^6 x+\frac{1}{4}\sec^4 x+C$

【解析】$\int\sec^4 x\cdot\tan^3 xdx=\int\sec^2 x\cdot\tan^3 xd(\tan x)=\int(\tan^2 x+1)\cdot\tan^3 xd(\tan x)$

$$=\int(\tan^5 x+\tan^3 x)d(\tan x)=\frac{1}{6}\tan^6 x+\frac{1}{4}\tan^4 x+C.$$

（26）$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

【答案】$(\arctan\sqrt{x})^2+C$

【解析】$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d(\sqrt{x})=2\int\arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})$

$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C$.

（27）$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x \sin x}dx$

【答案】$\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$

【解析】$\int \frac{\ln\tan x}{\cos x \sin x}dx = \int \ln\tan x d(\ln\tan x) = \frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$.

（28）$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

【答案】$\ln(e^x + e^{-x}) + C$

【解析】$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}d(e^x + e^{-x}) = \ln(e^x + e^{-x}) + C$.

2、（1）$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

【答案】$\sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{|x|} + C$

【解析】令 $x = \sec t$， $dx = \sec t\tan t dt$，则

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\tan t}{\sec t}\cdot\sec t\tan t dt = \int \tan^2 t dt = \int (\sec^2 t - 1)dt = \tan t - t + C$$

由 $x = \sec t$，得 $\tan t = \sqrt{x^2-1}, t = \arccos\frac{1}{|x|}$，故

原式$= \tan t - t + C = \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{|x|} + C$.

（2）$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

【答案】$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

【解析】令 $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$，则

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sec t}\cdot\sec^2 t dt = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

由 $x = \tan t$，得 $\sec t = \sqrt{x^2+1}$，故

原式$=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

（3）$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$

【答案】$\arcsin x+\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+C$

【解析】令 $x=\sin t, dx=\cos t dt$，则

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=\int\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{\frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{1+\cos t}}dt=\int(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2})dt=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

由 $x=\sin t$ 得 $\cos t=\sqrt{1-x^2}, t=\arcsin x, \tan\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$，故

原式$=t-\tan\frac{t}{2}+C=\arcsin x+\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+C$.

（4）$\int\sqrt{1+e^x}dx$

【答案】$2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$

【解析】令 $t=\sqrt{1+e^x}, e^x=t^2-1, d(e^x)=2tdt$，则

$$\int\sqrt{1+e^x}dx=\int\frac{e^x\sqrt{1+e^x}}{e^x}dx=\int\frac{\sqrt{1+e^x}}{e^x}d(e^x)=\int\frac{t}{t^2-1}\cdot 2tdt=2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$=2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$=2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C.$$

习题 4.3

（1）$\int xe^{-3x}dx$

【答案】$-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}+C$

【解析】$\int xe^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int xd(e^{-3x})=-\frac{1}{3}[x\cdot e^{-3x}-\int e^{-3x}dx]=-\frac{1}{3}[x\cdot e^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}]+C$

$=-\frac{1}{9}(3x+1)e^{-3x}+C$.

（2）$\int x^6\ln xdx$

【答案】$\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{49}x^7+C$

【解析】$\int x^6\ln xdx=\frac{1}{7}\int \ln xd(x^7)=\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{7}\int x^7d(\ln x)=\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{7}\int x^6dx$

$=\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}x^7+C=\frac{1}{7}x^7\ln x-\frac{1}{49}x^7+C$.

（3）$\int \arctan 7xdx$

【答案】$x\arctan 7x-\frac{1}{14}\ln(1+49x^2)+C$

【解析】$\int \arctan 7xdx=x\arctan 7x-\int xd(\arctan 7x)=\arctan 7x-\int x\cdot\frac{7}{1+49x^2}dx$

$=\arctan 7x-\frac{1}{14}\int\frac{1}{1+49x^2}d(1+49x^2)$

$=\arctan 7x-\frac{1}{14}\ln(1+49x^2)+C$.

（4）$\int e^{-x}\cos xdx$

【答案】$\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$

【解析】$\int e^{-x}\cos xdx=-\int\cos xd(e^{-x})=-e^{-x}\cos x+\int e^{-x}d(\cos x)$

$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin xdx=-e^{-x}\cos x+\int\sin xd(e^{-x})$

$=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}d(\sin x)$

$=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos xdx$，故得

$\int e^{-x}\cos xdx=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

（5）$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$

【答案】$-\frac{2}{17}e^{-2x}(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2})+C$

【解析】$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{2}d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\int e^{-2x}d(\sin\frac{x}{2})]$

$=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos\frac{x}{2}dx]$

$=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int\cos\frac{x}{2}d(e^{-2x})]$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}[e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\int e^{-2x}d(\cos\frac{x}{2})]$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}[e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx]$

$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$，移项整理得

$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx=-\frac{2}{17}e^{-2x}(\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2})+C$.

（6）$\int x\tan^2 xdx$

【答案】$x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$

【解析】$\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int x\sec^2 xdx-\int xdx=\int xd(\tan x)-\frac{1}{2}x^2$

$=x\tan x-\int\tan xdx-\frac{1}{2}x^2=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$.

（7）$\int e^{2x}\sin^2 xdx$

【答案】$\frac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)+C$

【解析】$\int e^{2x}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2xdx$

$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}\int\cos 2xd(e^{2x})=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}[e^{2x}\cos 2x-\int e^{2x}d(\cos 2x)]$

$=\frac{1}{4}e^{2x}(1-\cos 2x)-\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2xdx$.

由于$\int e^{2x}\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2xd(e^{2x})=\frac{1}{2}[e^{2x}\sin 2x-\int e^{2x}d(\sin 2x)]$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x-\int e^{2x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2xd(e^{2x})$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x-\frac{1}{2}[e^{2x}\cos 2x-\int e^{2x}d(\cos 2x)]$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x-\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x-\int e^{2x}\sin 2xdx$，移项得

$\int e^{2x}\sin 2xdx=\frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)$

故$\int e^{2x}\sin^2 xdx=\frac{1}{4}e^{2x}(1-\cos 2x)-\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2xdx$

$=\frac{1}{8}e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)+C$.

（8）$\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$

【答案】$\tan x\ln\cos x+\tan x-x+C$

【解析】$\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 x\ln\cos xdx=\int\ln\cos xd(\tan x)$

$=\tan x\ln\cos x-\int\tan xd(\ln\cos x)=\tan x\ln\cos x-\int\tan x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}dx$

$=\tan x\ln\cos x+\int\tan^2 xdx$

$=\tan x\ln\cos x+\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x\ln\cos x+\tan x-x+C$.

（9）$\int xe^x\sin xdx$

【答案】$\frac{1}{2}e^x[x\sin x+(1-x)\cos x]+C$

【解析】$\int xe^x\sin xdx=\int x\sin xd(e^x)$

$=xe^x\sin x-\int e^x(\sin x+x\cos x)dx$

$=xe^x\sin x-\int e^x\sin xdx-\int xe^x\cos xdx$

$=xe^x\sin x-\int e^x\sin xdx-\int x\cos xd(e^x)$

$=xe^x\sin x-\int e^x\sin xdx-[xe^x\cos x-\int e^x(\cos x-x\sin x)dx]$

$=xe^x\sin x-\int e^x\sin xdx-xe^x\cos x+\int e^x\cos xdx-\int xe^x\sin xdx$，移项整理得

$\int xe^x\sin xdx=\frac{1}{2}[xe^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx+\int e^x\cos xdx]$

$=\frac{1}{2}[xe^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx+\int e^xd(\sin x)]$

$$=\frac{1}{2}[xe^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx+(e^x\sin x-\int e^x\sin xdx)]$$

$$=\frac{1}{2}[xe^x(\sin x-\cos x)-2\int e^x\sin xdx+e^x\sin x]$$

由 $\int e^x\sin xdx=\int\sin xd(e^x)=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx=e^x\sin x-\int\cos xd(e^x)$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin xdx$，移项得 $\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

代入整理得

$$\int xe^x\sin xdx=\frac{1}{2}[xe^x(\sin x-\cos x)-2\int e^x\sin xdx+e^x\sin x]$$

$$=\frac{1}{2}e^x[x\sin x+(1-x)\cos x]+C.$$

（10）$\int x(\arctan x)^2dx$

【答案】$\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

【解析】$\int x(\arctan x)^2dx=\frac{1}{2}\int(\arctan x)^2d(x^2)=\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-\frac{1}{2}\int x^2d(\arctan x)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-\int\frac{(x^2+1-1)\arctan x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-\int(\arctan x-\frac{\arctan x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-\int\arctan xdx+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx.$$

先计算 $\int\arctan xdx$，$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ 两个不定积分:

$$\int\arctan xdx=x\arctan x-\int xd(\arctan x)=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1$$

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan xd(\arctan x)=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C_2.$$

故 $\int x(\arctan x)^2=\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2-\int\arctan xdx+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

（11）$\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan xdx$

【答案】$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$

【解析】$\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan xdx=\int\frac{(x^2+1-1)\arctan x}{1+x^2}dx=\int(\arctan x-\frac{\arctan x}{1+x^2})dx$

$=\int\arctan xdx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan xdx-\int\arctan xd(\arctan x)$

$=x\arctan x-\int xd(\arctan x)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

（12）$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$

【答案】$(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)+C$

【解析】$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=\int[\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x^2}]dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{\ln(1-x)}{x^2}dx$

$=\ln|x|-\int\ln(1-x)d(\frac{1}{x})=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}+\int\frac{1}{x}d\ln(1-x)$

$=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)}dx=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x})dx$

$=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}-\int\frac{1}{1-x}dx-\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|-\frac{\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x)-\ln|x|$

$=(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)+C$.

习题 4.4

1、（1）$\int\frac{x^3}{x+3}dx$

【答案】$\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$

【解析】$\int \frac{x^3}{x+3}dx = \int \frac{x^2(x+3)-3x^2}{x+3}dx = \int (x^2 - \frac{3x^2}{x+3})dx = \int x^2 dx - 3\int \frac{x^2}{x+3}dx$

$$= \int x^2 dx - 3\int \frac{x(x+3)-3x}{x+3}dx = \int x^2 dx - 3\int (x - \frac{3x}{x+3})dx$$

$$= \int x^2 dx - 3\int xdx + 9\int \frac{x}{x+3}dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9\int \frac{x+3-3}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9\int (1 - \frac{3}{x+3})dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9\int dx - 27\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

（2）$\int \frac{x^2+3x+4}{x-1}dx$

【答案】$\frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + C$

【解析】$\int \frac{x^2+3x+4}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)^2+5x+3}{x-1}dx = \int (x-1+\frac{5x+3}{x-1})dx$

$$= \int [x-1+\frac{5(x-1)+8}{x-1}]dx = \int (x+4+\frac{8}{x-1})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8\ln|x-1| + C.$$

（3）$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$

【答案】$\ln|x-2| + \ln|x+5| + C$

【解析】因为 $\frac{2x+3}{x^2+3x-10} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}$，故

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int (\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5})dx = \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x+5}dx$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x+5| + C.$$

（4）$\int \frac{3}{x^3+1}dx$

【答案】$\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

【解析】$\int \frac{3}{x^3+1}dx = \int \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int (\frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{x^2-x+1})dx$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2}{x^2-x+1}dx-\int\frac{x}{x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{2}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}d(x^2-x+1)+\sqrt{3}\int\frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}d(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

（5）$\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

【答案】$2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$

【解析】因为$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x+3)}$，故

$$\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx=\int[\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x+3)}]dx$$

$$=2\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$$

（6）$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$

【答案】$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$

【解析】因为$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}$，故

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx=\int[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C.$$

（7）$\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$

【答案】$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

【解析】$\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

2、（1）$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

【答案】$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{1+x}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|+C$

【解析】令$t=\sqrt[3]{x+1}$，$x=t^3-1$，则$dx=3t^2dt$，故

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{3t^2}{1+t}dt=3\int\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int(t-1+\frac{1}{1+t})dt$$

$$=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|1+t|+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{1+x}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{1+x}\right|+C.$$

（2）$\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx$

【答案】$\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x+C$

【解析】令$t=\sqrt{x}$，$x=t^2$，则$dx=2tdt$，故

$$\int\frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{t^3+1}{t+1}\cdot 2tdt=2\int\frac{t(t^3+1)}{t+1}dt=2\int\frac{t(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt$$

$$=2\int(t^3-t^2+t)dt=\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3+t^2+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x+C.$$

（3）$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$

【答案】$\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

【解析】令 $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$， $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，则 $dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$，故

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}=\int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt=-4\int\frac{t^2}{1-t^4}dt=4\int\frac{t^2-1+1}{t^4-1}dt$$

$$=4\int(\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{t^4-1})dt=4\int\frac{1}{t^2+1}dt+4\int\frac{1}{t^4-1}dt$$

$$=4\int\frac{1}{t^2+1}dt+2\int(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1})dt$$

$$=2\int\frac{1}{t^2+1}dt+2\int\frac{1}{t^2-1}dt$$

$$=2\arctan t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

第四章　复习题

1. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\sin x$，则 $\int f''(x)dx=$（　）

A. $x\sin x+C$　B. $2\cos x-x\sin x+C$　C. $\sin x-x\cos x+C$　D. $\sin x+x\cos x+C$

【答案】B

【解析】因为 $x\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$f(x)=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$， $f'(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

故 $\int f''(x)dx=f'(x)+C=2\cos x-x\sin x+C$.

2. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(3-2x)dx=$（　）

A. $-\frac{1}{2}F(3-2x)+C$　B. $\frac{1}{2}F(3-2x)+C$　C. $-2F(3-2x)+C$　D. $2F(3-2x)+C$

【答案】A

【解析】$\int f(3-2x)dx=-\frac{1}{2}\int f(3-2x)d(3-2x)$,

$\because \int f(x)dx = F(x)+C$

$\therefore \int f(3-2x)dx = -\frac{1}{2}F(3-2x)+C$

3. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　）

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$　　C. $\cos x$　　D. $-\cos x$

【答案】B

【解析】$f'(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=\int \sin x dx = -\cos x + C_1$

$F(x)=\int f(x)dx = \int(-\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2$.

4. 设 $F(x)=\cos x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx =$ ________.

【答案】$x\cos x - \sin x + C$

【解析】$\int xf(x)dx = \int xdF(x) = xF(x) - \int F(x)dx = x\cos x - \int \cos xdx$

$= x\cos x - \sin x + C$.

5. 求不定积分 $\int x^2 \cos xdx$.

【答案】$x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

【解析】$\int x^2 \cos xdx = \int x^2 d\sin x = x^2 \sin x - \int \sin xdx^2 = x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx$

$= x^2 \sin x + 2\int xd\cos x = x^2 \sin x + 2[x\cos x - \int \cos xdx]$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.

6. 求不定积分 $\int x\ln^2 xdx$.

【答案】$\frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$

【解析】$\int x\ln^2 xdx = \frac{1}{2}\int \ln^2 xdx^2 = \frac{1}{2}[x^2 \ln^2 x - \int x^2 d(\ln^2 x)]$

$= \frac{1}{2}(x^2 \ln^2 x - \int 2x\ln xdx) = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \int x\ln xdx$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}\int \ln xd(x^2) = \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}[x^2 \ln x - \int xdx]$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$.

7. 求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

【答案】$-27\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

【解析】令 $x=3\sin t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，$dx=d(3\sin t)=3\cos tdt$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int\frac{27\sin^3 t}{3\cos t}\cdot 3\cos tdt=27\int\sin^3 tdt=-27\int\sin^2 td(\cos t)$$

$$=-27\int(1-\cos^2 t)d(\cos t)=-27(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t)+C.$$

由 $x=3\sin t$，知 $\cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$

故原式 $=-27(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t)+C=-27\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C$.

8. 求不定积分 $\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$.

【答案】$-\frac{\ln x}{1+x}+\ln x-\ln(1+x)+C$

【解析】$\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int\ln xd\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{1+x}$

$$=-\frac{\ln x}{1+x}+\ln x-\ln(1+x)+C.$$

9. 求不定积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}dx$.

【答案】$\frac{2(\sqrt{x+3})^5}{5}-4(\sqrt{x+3})^3+18\sqrt{x+3}+C$

【解析】令 $\sqrt{x+3}=t$，则 $x=t^2-3$，$dx=2tdt$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}dx=\int\frac{(t^2-3)^2}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^4-6t^2+9)dt=2(\frac{1}{5}t^5-2t^3+9t)+C=\frac{2}{5}t^5-4t^3+18t+C$$

$$=\frac{2}{5}t^5-4t^3+18t+C=\frac{2(\sqrt{x+3})^5}{5}-4(\sqrt{x+3})^3+18\sqrt{x+3}+C.$$

10. 设 $F(x)=e^{2x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$（　）

A. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+C$ B. $e^{2x}(2x-1)+C$ C. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+C$ D. $e^{2x}(2x+1)+C$

【答案】B

【解析】$F(x)=e^{2x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)=F'(x)=2e^{2x}$

故 $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=xf(x)-F(x)+C$

$=2xe^{2x}-e^{2x}+C=e^{2x}(2x-1)+C$.

11. 求不定积分 $\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$.

【答案】$\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

【解析】令 $\sqrt{x+1}=t$, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx&=\int\frac{1}{(t^2-1)t}\cdot 2tdt=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt\\&=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C\\&=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.\end{aligned}$$

12. 设 $f(x)$ 是函数 $\cos 2x$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$, 则 $\int f(x)dx$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$　　B. $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$　　C. $-\cos 2x+C$　　D. $\cos 2x+C$

【答案】A

【解析】$f'(x)=\cos 2x, f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$, 由 $f(0)=0$, 得 $C=0$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

13. 求不定积分 $\int(x^2+x)e^x dx$.

【答案】$(x^2-x+1)e^x+C$

【解析】$\int\left(x^2+x\right)e^x dx=\int\left(x^2+x\right)d(e^x)=(x^2+x)e^x-\int e^x d(x^2+x)$

$=(x^2+x)e^x-\int(2x+1)e^x dx=(x^2+x)e^x-\int(2x+1)d(e^x)$

$=(x^2+x)e^x-(2x+1)e^x+2\int e^x dx$

$=(x^2-x+1)e^x+C$.

第五章 定积分及其应用

习题 5.1

1. 利用定积分定义计算下列积分.

（1）$\int_0^1 x^2dx$

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】因为被积函数 $y=x^2$ 在积分区间 $[0,1]$ 上连续，而连续函数是可积的，所以积分与区间 $[0,1]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关. 我们把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份，分点为 $x_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 这样，每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$. 取 $\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$. 于是，得和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).$$

当 $\lambda\to0$ 即 $n\to\infty$ 时，取上式右端的极限，由定积分的定义得

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}.$$

（2）$\int_1^2 xdx$

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】因为被积函数 $y=x$ 在积分区间 $[1,2]$ 上连续，而连续函数是可积的，所以积分与区间 $[1,2]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关. 我们把区间 $[1,2]$ 分成 n 等份，分点为 $x_i=1+\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 这样，每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$. 取 $\xi_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$. 于是，得和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=1+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=1+\frac{n-1}{2n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}.$$

当 $\lambda\to0$ 即 $n\to\infty$ 时，取上式右端的极限，由定积分的定义得

$\int_1^2 xdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}$.

2. 根据定积分的几何意义，证明下列等式.

（1）$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

【证明】$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{4}S_{圆}=\frac{\pi}{4}$，其中 $S_{圆}$ 是以原点为圆心，半径为 1 的圆的面积.

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=0$

【证明】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx=-A$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=A$，由积分对区间的可加性得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=0.$$

3. 根据定积分性质，说明下列积分哪一个较大？

（1）$\int_0^1 x^2dx$ 与 $\int_0^1 x^3dx$

【答案】$\int_0^1 x^2dx>\int_0^1 x^3dx$

【解析】因为在区间 $[0,1]$ 上，$x^2>x^3$，故 $\int_0^1 x^2dx>\int_0^1 x^3dx$.

（2）$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx$ 与 $\int_{-2}^{-1}3^x dx$

【答案】$\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx>\int_{-2}^{-1}3^x dx$

【解析】因为在区间 $[-2,-1]$ 上，$(\frac{1}{3})^x>3^x$，故 $\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{3})^x dx>\int_{-2}^{-1}3^x dx$.

（3）$\int_3^4(\ln x)^4dx$ 与 $\int_3^4(\ln x)^3dx$

【答案】$\int_3^4(\ln x)^4dx>\int_3^4(\ln x)^3dx$

【解析】因为在区间 $[3,4]$ 上，$(\ln x)^4>(\ln x)^3$，故 $\int_3^4(\ln x)^4dx>\int_3^4(\ln x)^3dx$.

4. 估算下列定积分值的范围.

（1）$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan xdx$

【答案】$\frac{\pi}{9}\le I\le\frac{2}{3}\pi$

【解析】设 $f(x)=x\arctan x$，在区间 $[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$ 上，$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0$，则 $f(x)$ 在

$[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$ 上单调递增，于是

$$M=f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}, \quad m=f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

由积分估值定理得 $\frac{\pi}{9}\le\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x dx\le\frac{2}{3}\pi$.

（2）$\int_0^1 e^{x^2}dx$

【答案】$1\le I\le e$

【解析】设 $f(x)=e^{x^2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，于是

$$M=f(1)=e, \quad m=f(0)=1$$

由积分估值定理得 $1\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e$.

习题 5.2

1. 计算下列各导数.

（1）$\left(\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt\right)'_x$

【答案】$\frac{\sin x}{x}$

【解析】$\left(\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt\right)'_x = \frac{\sin x}{x}$.

（2）$\left(\int_t^0 e^{-x^2}\right)'_t$

【答案】$-e^{-t^2}$

【解析】$\left(\int_t^0 e^{-x^2}\right)'_t = \left(-\int_0^t e^{-x^2}\right)'_t = -e^{-t^2}$.

（3）$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$

【答案】$2x\sqrt{1+x^4}$

【解析】$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt = \sqrt{1+x^4}\cdot(x^2)' = 2x\sqrt{1+x^4}$.

（4）$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

【答案】$\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$

【解析】$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{12}}}\cdot(x^3)' - \frac{1}{\sqrt{1+x^8}}\cdot(x^2)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

2. 计算下列定积分

（1）$\int_0^1 e^{-x}dx$

【答案】$1-e^{-1}$

【解析】由于$-e^{-x}$是e^{-x}的一个原函数，所以按牛顿莱布尼兹公式，有

$\int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = 1-e^{-1}$.

（2）$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$

【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解析】由于 $\arctan x$ 是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以按牛顿莱布尼兹公式，有

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{12}.$$

（3）$\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$

【答案】$45\frac{1}{6}$

【解析】$\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx = \int_4^9 (\sqrt{x}+x)dx = (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2)\Big|_4^9 = 45\frac{1}{6}.$

（4）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

【答案】$\frac{\pi}{6}$

【解析】$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^1 \frac{d(\frac{x}{2})}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$

（5）$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1+x}dx$

【答案】$-\ln 2$

【解析】由于 $\ln|1+x|$ 是 $\dfrac{1}{1+x}$ 的一个原函数，所以按牛顿莱布尼兹公式，有

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|\Big|_{-3}^{-2} = -\ln 2.$$

（6）$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^e (1+\ln x)d(1+\ln x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2\Big|_1^e = \frac{3}{2}.$

（7）$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx$

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】由于$-\dfrac{1}{1+x}$是$\dfrac{1}{(1+x)^2}$的一个原函数，所以按牛顿莱布尼兹公式，有

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = (-\frac{1}{1+x})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

（8）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

【答案】1

【解析】由于$\sin x$是$\cos x$的一个原函数，所以按牛顿莱布尼兹公式，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

（9）$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\cos^2 2\varphi}d\varphi$

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\cos^2 2\varphi}d\varphi = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\cos^2 2\varphi}d(2\varphi) = \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 2\varphi d(2\varphi) = \dfrac{1}{2}\tan 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

（10）$\int_{-1}^1 \dfrac{2x-1}{x-2}dx$

【答案】$4-3\ln 3$

【解析】$\int_{-1}^1 \dfrac{2x-1}{x-2}dx = \int_{-1}^1 \dfrac{2(x-2)+3}{x-2}dx = \int_{-1}^1 (2+\dfrac{3}{x-2})dx$

$$= (2x+3\ln|x-2|)\Big|_{-1}^1 = 4-3\ln 3.$$

（11）$\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx$

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln 2$

【解析】$\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 2.$

（12）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \dfrac{\sin\frac{1}{y}}{y^2}dy$

【答案】1

【解析】 $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{y}}{y^2}dy=-\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{y}d\frac{1}{y}=\cos\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}=1$.

（13） $\int_2^3\frac{1}{2y^2+3y-2}dy$

【答案】 $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$

【解析】 $\int_2^3\frac{1}{2y^2+3y-2}dy=\int_2^3\frac{1}{(y+2)(2y-1)}dy=\frac{1}{5}\int_2^3(\frac{2}{2y-1}-\frac{1}{y+2})dy$

$$=\frac{1}{5}(\ln|2y-1|-\ln|y+2|)\Big|_2^3=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2y-1}{y+2}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}.$$

（14） $\int_0^{\pi}|\cos\varphi|d\varphi$

【答案】2

【解析】 $\int_0^{\pi}|\cos\varphi|d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos\varphi)d\varphi=\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$.

（15） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t-\cos^3 t}dt$

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t-\cos^3 t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t-\cos^3 t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t(1-\cos^2 t)}dt$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{\cos t}dt=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t}d(\cos t)=-\frac{4}{3}(\cos t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

（16） $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$

【答案】 $1-\frac{\pi}{4}$

【解析】 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta=(\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

3. 求下列极限.

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}$

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

【答案】2

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2x^2}=2$.

习题 5.3

1. 求下列定积分.

（1）$\int_0^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$

【答案】$4-2\ln 3$

【解析】令$u=\sqrt{t}$，$t=u^2$，则$dt=2udu$，且当$t=0$时，$u=0$；当$t=4$时，$u=2$．于是

$$\int_0^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}}=\int_0^2 \frac{2udu}{1+u}=2\int_0^2 \frac{1+u-1du}{1+u}=2\int_0^2 (1-\frac{1}{1+u})du$$

$$=2(u-\ln|1+u|)\Big|_0^2=4-2\ln 3.$$

（2）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

【答案】$\frac{\pi}{16}a^4$

【解析】令$x=a\sin t$，则$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos tdt$．

且当$x=0$时，$t=0$；当$x=a$时，$t=\frac{\pi}{2}$．于是

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos tdt=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt$$

$$=\frac{a^4}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}a^4.$$

（3）$\int_0^{\ln 3}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

【答案】$2\ln(1+\sqrt{2})-\ln 3$

【解析】令$t=\sqrt{1+e^x}$，$x=\ln(t^2-1)$，则$dx=\frac{2t}{t^2-1}$．

且当$x=0$时，$t=\sqrt{2}$；当$x=\ln 3$时，$t=2$．于是

$$\int_0^{\ln 3}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{t^2-1}dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=2\ln(1+\sqrt{2})-\ln 3.$$

（4）$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】$\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_0^{\pi}\dfrac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)=-\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\dfrac{\pi}{2}$.

（5）$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\dfrac{dx}{e^x-e^{-x}}$

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

【解析】令$t=e^x$，当$x=\ln 2$时，$t=2$；当$x=\ln 3$时，$t=3$. 于是

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{e^{2x}-1}d(e^x)=\int_2^3\frac{1}{t^2-1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

（6）$\int_0^{e-1}x\ln(1+x)dx$

【答案】$\dfrac{1}{4}(e^2-3)$

【解析】$\int_0^{e-1}x\ln(1+x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{e-1}\ln(1+x)dx^2=\dfrac{1}{2}[x^2\ln(1+x)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}x^2d\ln(1+x)]$

$$=\frac{1}{2}[(e-1)^2-\int_0^{e-1}\frac{x^2}{1+x}dx]=\frac{1}{2}[(e-1)^2-\int_0^{e-1}(x-1+\frac{1}{1+x})dx]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(e-1)^2-[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)]\Big|_0^{e-1}\right]=\frac{1}{2}\left[(e-1)^2-[\frac{1}{2}(e-1)^2-(e-1)+1]\right]$$

$$=\frac{1}{4}(e^2-3).$$

（7）$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos x dx$

【答案】$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

【解析】$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos x dx=x\arccos x\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x d\arccos x$

$$=x\arccos x\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

（8）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx$

【答案】$\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$

【解析】$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xde^{2x}=\frac{1}{2}[e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx]$

$$=\frac{1}{2}[-1+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xde^{2x}]=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}[e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx]$$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}[e^{\pi}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx]$，移项整理得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2).$$

（9）$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin^3 x+1}{1+x^2}dx$

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin^3 x+1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin^3 x}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=2\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

（10）$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

【答案】$2(1-\frac{1}{e})$

【解析】$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx=\int_1^e\ln xdx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln xdx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx-(x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx)=2(1-\frac{1}{e}).$

2. 求定积分 $\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\cos xdx$， $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数.

【答案】0

【解析】令 $F(x)=f(x)-f(-x)$，则 $F(-x)=f(-x)-f(x)=-\left[f(x)-f(-x)\right]=-F(x)$，所以

$F(x)$ 为奇函数。因为 $f(x)-f(-x)$ 为奇函数，$\cos x$ 为偶函数，所以

$[f(x)-f(-x)]\cos x$ 为奇函数，故 $\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\cos xdx=0$.

【注】函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

3. 设 $f(2x+1)=xe^{x}$，求 $\int_{3}^{5}f(t)dt$.

【答案】$2e^{2}$

【解析】令 $t=2x+1$，则 $dt=2dx$，当 $t=3$ 时，$x=1$；当 $t=5$ 时，$x=2$. 故

$$\int_{3}^{5}f(t)dt=2\int_{1}^{2}f(2x+1)dx=2\int_{1}^{2}xe^{x}dx=2\int_{1}^{2}xde^{x}=2xe^{x}\Big|_{1}^{2}-2\int_{1}^{2}e^{x}dx$$

$$=2xe^{x}\Big|_{1}^{2}-2\int_{1}^{2}e^{x}dx=4e^{2}-2e-2e^{x}\Big|_{1}^{2}=2e^{2}.$$

4. 设 $f(0)=1, f(2)=4, f'(2)=2,$ 求 $\int_{0}^{1}xf''(2x)dx$.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】$\int_{0}^{1}xf''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}xdf'(2x)=\frac{1}{2}[xf'(2x)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f'(2x)dx]$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f'(2x)dx=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(0)$$

$$=\frac{1}{4}.$$

5. 证明 $\int_{0}^{1}x^{m}(1-x)^{n}dx=\int_{0}^{1}x^{n}(1-x)^{m}dx$.

【证明】令 $1-x=t$，则 $x=1-t, dx=-dt$，当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=1$ 时，$t=0$. 故

$$\int_{0}^{1}x^{m}(1-x)^{n}dx=-\int_{1}^{0}(1-t)^{m}t^{n}dt=\int_{0}^{1}(1-t)^{m}t^{n}dt=\int_{0}^{1}(1-x)^{m}x^{n}dx=\int_{0}^{1}x^{n}(1-x)^{m}dx.$$

6. 证明 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\arccos x}$.

【证明】令 $t=\cos x$，则 $x=\arccos t$，当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$t=\frac{1}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$. 故

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} d\cos x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{x} d\cos x = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\arccos t} dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\arccos x} dx.$$

习题 5.4

1. 判断下列反常积分的敛散性，如果积分收敛，则计算反常积分的值.

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\int_1^{+\infty}x^{-4}dx=-\frac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{3}x^{-3})+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

（2）$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

【答案】1

【解析】$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-x}=-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

$=-\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$=-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}+1=1$.

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

【答案】$\ln 2$

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2})dx=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_0^{+\infty}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$.

（4）$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}$

【答案】1

【解析】$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^2}=\int_{e^e}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x(\ln\ln x)^2}=\int_{e^e}^{+\infty}\frac{d\ln\ln x}{(\ln\ln x)^2}$

$=-\frac{1}{\ln\ln x}\Big|_{e^e}^{+\infty}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln\ln x}+1=1$.

（5）$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{1+e^x}dx$

【答案】$\ln 2$

【解析】$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)=\ln(1+e^x)\Big|_{-\infty}^{0}=\ln 2$.

（6）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2}$

【答案】$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(\frac{x}{\sqrt{2}})}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

（7）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

【答案】π

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$.

习题 5.5

1.求曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ 的面积.

【答案】$2\pi+\frac{4}{3}$

【解析】选取 x 为积分变量, 积分区间为 $[0,2]$，则

$$A=2\int_0^2(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2)dx=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx-\int_0^2 x^2dx$$

$$=x\sqrt{8-x^2}+8\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2$$

$$=2\pi+\frac{4}{3}.$$

2.求曲线 $y=e^x, y=e^{-x}$ 与直线 $x=1$ 的面积.

【答案】$e+e^{-1}-2$

【解析】选取 x 为积分变量, 积分区间为 $[0,1]$, 则面积微元

$$dA=(e^x-e^{-x})dx$$

故 $A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2.$

3.求抛物线 $y^2=x+2$ 与直线 $x-y=0$ 所围成图形的面积.

【答案】$\frac{9}{2}$

【解析】先求得抛物线 $y^2=x+2$ 与直线 $x-y=0$ 的交点坐标 $(-1,-1)$ 和 $(2,2)$

根据图形特点，选取 y 为积分变量,积分区间为 $[-1,2]$, 则面积微元

$$dA=[y-(y^2-2)]dy$$

故 $A=\int_{-1}^2(y-y^2+2)dy=\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3+2y\right)\Big|_{-1}^2=\frac{9}{2}.$

4.求由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成图形的面积, 分别绕 ox, oy 轴旋转一周的体积.

【答案】$\frac{128}{7}\pi, \frac{64}{5}\pi$

【解析】以 x 为积分变量，积分区间为 $[0,2]$, 于是绕 ox 轴旋转一周的体积:

$$V_x = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi \cdot \frac{1}{7} x^7 \Big|_0^2 = \frac{128}{7}\pi .$$

以 y 为积分变量，积分区间为$[0,8]$，于是绕 oy 轴旋转一周的体积:

$$V_y = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 - \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = 32\pi - \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = 32\pi - \pi \cdot \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = \frac{64}{5}\pi.$$

5.求由 $y = x^2, x = y^2$ 绕 oy 轴旋转一周的体积.

【答案】$\frac{3}{10}\pi$

【解析】设 y 为积分变量,积分区间为$[0,1]$,于是该旋转体体体积

$$V = \pi \int_0^1 (y - y^4) dy = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{5} y^5\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$

第五章　复习题

1.定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+1)\sin^2 xdx$ 的值为________.

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\sin^2 xdx$ 是奇函数, 于是 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\sin^2 xdx=0$

原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx=(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

2.计算定积分 $\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$.

【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】令 $\sqrt{x+1}=t, x=t^2-1, dx=2tdt$, 当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=3$ 时, $t=2$. 于是

$$\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{t^2-1}{1+t}\cdot 2tdt=2\int_1^2\left(t^2-t\right)dt=2(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^2=\frac{5}{3}.$$

3.设反常积分 $\int_a^{+\infty}e^{-x}dx=\frac{1}{2}$, 则常数 $a=$______.

【答案】$\ln 2$

【解析】$\int_a^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_a^{+\infty}=e^{-a}=\frac{1}{2}, a=\ln 2$, 解得 $a=\ln 2$.

4.计算定积分 $\int_0^2\frac{dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

【答案】$\frac{\pi}{2}-1$

【解析】令 $x=2\sin t$, 则 $dx=2\cos tdt$, 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=3$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\int_0^2\frac{dx}{2+\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos t}{2+2\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}d\left(\frac{t}{2}\right)=(t-\tan\frac{t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

5.定积分 $\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{1-x^2}dx$ 的值为______.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】$\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

$\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}dx=0$，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$ 原式$=\dfrac{\pi}{2}$.

6.计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}dx$.

【答案】$2-\dfrac{\pi}{2}$

【解析】令 $\sqrt{2x-1}=t$，$x=\dfrac{t^2+1}{2}$，$dx=tdt$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$t=0$；当 $x=\dfrac{5}{2}$ 时，$t=2$. 于是

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}dx=\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}dt=\int_0^2\frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=\int_0^2(1-\frac{4}{t^2+4})dt$$

$$=\left(t-2\arctan\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{\pi}{2}.$$

7.计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\sin xdx$.

【答案】2

【解析】奇函数在对称区间的积分为零，则

原积分$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x=-2[x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx]=2$.

8.计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}x\arcsin xdx$.

【答案】$\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$

【解析】$\int_0^{\frac{1}{2}}x\arcsin xdx=\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xd\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=\arcsin x\cdot\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2}{2}d\arcsin x$

$$=\frac{\pi}{48}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

令 $x=\sin t$，$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin^2 t}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos t}\cdot\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-\cos 2t}{4}dt$

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{8}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{16}.$$

故原式$=\frac{\pi}{48}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{48}$.

9.计算定积分$\int_1^2(2x+1)\ln xdx$.

【答案】$6\ln 2-\frac{5}{2}$

【解析】$\int_1^2(2x+1)\ln xdx=\int_1^2 2x\ln xdx+\int_1^2\ln xdx=\int_1^2\ln xdx^2+x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 xd\ln x$

$$=x^2\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x^2d\ln x+2\ln 2-\int_1^2 dx$$

$$=4\ln 2-\int_1^2 xdx+2\ln 2-1$$

$$=6\ln 2-\frac{5}{2}.$$

10.设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，则与$\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)dx$的值相等的定积分为（　）

A. $\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx$

B. $\int_2^1\frac{f(x)}{x^2}dx$

C. $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{f(x)}{x^2}dx$

D. $\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2}dx$

【答案】C

【解析】设$t=\frac{1}{x}$，原式$=\int_1^{\frac{1}{2}}f(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{t^2}f(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x^2}f(x)dx$.

11.在抛物线$y=x^2(x>0)$上求一点P,使该抛物线与其在点P处的切线及x轴所围成的平面图形的面积为$\frac{2}{3}$,并求该平面图形绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

【答案】$\frac{16}{15}\pi$

【解析】设$P(a,a^2)$，由$y=x^2$，得$y'=2x$，$k=y'(a)=2a$

切线方程为$y-a^2=2a(x-a)$，即$y=2ax-a^2$

该切线交 x 轴于 $M(\frac{a}{2},0)$

$$S=\int_0^a x^2dx-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)a^2=\frac{1}{12}a^3=\frac{2}{3},\ a=2,P(2,4)$$

切线方程 $y=4x-4$，该切线交 x 轴于 $M(1,0)$

$$V=\pi\int_0^2 x^4dx-\frac{\pi}{3}(2-1)4^2=\frac{16}{15}\pi\ .$$

12.设平面图形 D 由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=ax(a>0)$ 所围成，已知平面图形 D 分别绕两坐标轴旋转一周所形成的旋转体的体积相等，试求：（1）常数 a 的值；（2）平面图形 D 的面积.

【答案】（1） $a=\frac{5}{4}$ （2） $S=\frac{125}{384}$

【解析】由题意知 $\int_0^a \pi(a^2x^2-x^4)dx=\int_0^{a^2}\pi(y-\frac{y^2}{a^2})dy$，$a=\frac{5}{4}$

$$S=\int_0^{\frac{5}{4}}(\frac{5}{4}x-x^2)dx=\frac{125}{384}.$$

13.设平面图形 D 由曲线 $y=e^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围成，试求：

（1）平面图形 D 的面积；

（2）平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的的旋转体的体积.

【答案】（1） $S=\frac{e}{2}-1$ （2） $V=\frac{1}{6}e^2\pi-\frac{1}{2}\pi$

【解析】设切点为 (x_0,e^{x_0})，则 $k=y'(x_0)=e^{x_0}$，故切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$

由过原点将 $(0,0)$ 代入得 $x_0=1$，得切点 $(1,e)$，切线方程 $y=ex$.

（1） $S=\int_0^1(e^x-ex)dx=e^x\Big|_0^1-\frac{e}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1.$

（2） $V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx-\pi\int_0^1(ex)^2dx=\pi(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{6}e^2\pi-\frac{1}{2}\pi$.

14.设 D 是由曲线弧 $y=\cos x\left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\sin x\left(\frac{\pi}{4}\le x\le\pi\right)$ 及 x 轴所围成的平面图形，试求：

（1）平面图形 D 的面积；

（2）平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的的旋转体的体积.

【答案】（1） $S_D=\sqrt{2}$ （2） $V_x=\dfrac{\pi(\pi+2)}{4}$

【解析】（1） $S_D=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin xdx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}$.

（2） $V_x=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin^2 xdx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx$

$$=\pi(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\pi(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi(\pi+2)}{4}.$$

15.设函数 $\Phi(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt$，则 $\Phi''(1)=$________.

【答案】 $2\ln 2+2$

【解析】 $\Phi'(x)=2x\ln(1+x^2),\Phi''(x)=2\ln(1+x^2)+\dfrac{4x^2}{1+x^2}$，$\Phi''(1)=2\ln 2+2$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：函数 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]dx$.

【证明】令 $a+b-x=u$，则

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-x)dx=-\int_b^{\frac{a+b}{2}}f(u)du=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(u)du=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

故 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-x)dx$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

17.函数 $F(x)=\int_x^{2x}\ln tdt$，则 $F'(x)=$________.

【答案】 $\ln 4x$

【解析】 $F(x)=\int_x^{2x}\ln tdt\Rightarrow F'(x)=2\ln 2x-\ln x=2\ln 2+2\ln x-\ln x=\ln 4x$.

18.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上连续，且 $f(x)$ 为奇函数，证明：

（1） $\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$

（2） $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

【证明】（1） 令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_a^0 f(-t)d(-t)=-\int_a^0 -f(t)dt=-\int_0^a f(t)dt=-\int_0^a f(x)dx$$

（2） $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0$.

19.设$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\frac{1}{2\ln 2}$，则积分下限$a$的值为（　）

A.2　　B.4　　C.6　　D.8

【答案】B

【解析】$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}d(\ln x)=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{a}^{+\infty}=\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{2\ln 2}$，得$a=4$.

第六章　微分方程

习题 6.1

1．指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

（1）$xy' = 2y, y = 5x^2$；

【解析】将 $y = 5x^2$ 代入所给微分方程，等号左边 $= xy' = x(5x^2)' = 10x^2$，等号右边 $= 2y = 2\cdot 5x^2 = 10x^2$，左边=右边，所以 $y = 5x^2$ 是所给微分方程的解。

（2）$y'' + y = 0, y = 3\sin x - 4\cos x$；

【解析】将 $y = 3\sin x - 4\cos x$ 代入所给的微分方程，等号左边为

$y'' + y = (3\sin x - 4\cos x)'' + 3\sin x - 4\cos x = (3\cos x + 4\sin x)' + 3\sin x - 4\cos x = -3\sin x + 4\cos x + 3\sin x - 4\cos x = 0$

，等号左边等于等号右边，所以 $y = 3\sin x - 4\cos x$ 是所给微分方程的解。

（3）$y'' - 2y' + y = 0, y = x^2e^x$；

【解析】将 $y = x^2e^x$ 代入所给的微分方程，等号左边为 $y'' - 2y' + y = (x^2e^x)'' - 2(x^2e^x)' + x^2e^x$

$= (2xe^x + x^2e^x)' - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x = (2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x) - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x = 2e^x$，等号右边为 0，所以等号右边和等号左边不相等，$y = x^2e^x$ 不是所给微分方程的解。

（4）$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0, y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

【解析】将 $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ 代入所给的微分方程，等号左边为 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y$

$= (C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x})'' - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x})' + \lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x})$

$= (C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})' - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x})$

$= (C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}) - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}) = 0$，左边=右边，

因此，$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解。

2．在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解：

（1）$(x - 2y)y' = 2x - y, x^2 - xy + y^2 = C$；

【解析】$x^2 - xy + y^2 = C$ 等号左右两边关于 x 求导，得 $2x - y - xy' + 2yy' = 0$，整理即可得 $(x - 2y)y' = 2x - y$，所以方程 $x^2 - xy + y^2 = C$ 确定的函数为所给微分方程

$(x-2y)y'=2x-y$ 的解。

（2）$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy)$.

【解析】 将方程 $y=\ln(xy)$ 左右两边关于 x 求导，得 $y'=\frac{1}{xy}(y+xy')$，整理得 $xyy'-y-xy'=0$，对上式等号左右两边再关于 x 求导，可得 $yy'+xy'^2+xyy''-y'-y'-xy''=0$，化简整理得，$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$，因此，$y=\ln(xy)$ 所确定的函数为所给微分方程 $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$ 的解。

习题 6.2

1．求下列微分方程的通解：

（1）$xy'-y\ln y=0$；

【解析】分离变量：$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{1}{x}dx$

两边积分：$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{1}{x}dx$

计算得：$\ln\ln y=\ln x+\ln C$

通解为：$y=e^{Cx}$

（2）$\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$；

【解析】分离变量：$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

两边积分：$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

计算得：$\arcsin y=\arcsin x+C$

通解为：$\arcsin y=\arcsin x+C$

（3）$\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$.

【解析】分离变量：$\frac{\cos ydy}{\sin y}=-\frac{\cos xdx}{\sin x}$

两边积分：$\int\frac{\cos ydy}{\sin y}=-\int\frac{\cos xdx}{\sin x}$

计算得：$\ln(\sin y)=-\ln(\sin x)+\ln C$

通解为：$\sin y=\frac{C}{\sin x}$ 或 $\sin x\sin y=C$

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y' = e^{2x-y}, y\big|_{x=0} = 0$；

【解析】分离变量：$e^y dy = e^{2x}dx$

两边积分：$\int e^y dy = \int e^{2x}dx$

计算得：$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

因为 $y\big|_{x=0} = 0$，所以 $C = \frac{1}{2}$

特解为：$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$

（2）$y'\sin x = y\ln y, y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$；

【解析】分离变量：$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{1}{\sin x}dx$

两边积分：$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{1}{\sin x}dx$

计算得：$\ln\ln y = \ln(\csc x - \cot x) + \ln C$

$\ln y = C(\csc x - \cot x)$

$\ln y = C\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$\ln y = C\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$\ln y = C\tan\frac{x}{2}$

$y = e^{C\tan\frac{x}{2}}$

因为 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$，所以 $C = 1$ ，

特解为：$y = e^{\tan\frac{x}{2}}$

（3）$xdy + 2ydx = 0, y\big|_{x=2} = 1$.

【解析】分离变量：$\frac{dy}{y} = \frac{-2dx}{x}$

两边积分：$\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x}$

计算得：$\ln y = -2\ln x + \ln C$

$$y=\frac{C}{x^2}$$

因为$y|_{x=2}=1$， 所以$C=4$

特解为： $y=\frac{4}{x^2}$

3．求下列齐次方程的通解：

（1） $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；

【解析】当$x>0$时，等号两边同除以x，得$y'-\frac{y}{x}-\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}=0$，

令$\frac{y}{x}=u$，则$y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ，

那么$u+x\frac{du}{dx}-u-\sqrt{u^2-1}=0$，即$x\frac{du}{dx}=\sqrt{u^2-1}$，

分离变量： $\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{dx}{x}$ ，

两边积分： $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{dx}{x}$，

计算得： $\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+\ln C$，

$$u+\sqrt{u^2-1}=Cx，$$

回代： $\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}=Cx$，

两边同乘x，得$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$ ；

同理，当$x<0$时，也可以用同样的方法得到$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$，并且当$x=0$时，也满足上式，综上所述，齐次方程的通解为$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$.

（2） $(x^2+y^2)dx-xydy=0$；

【解析】两边同除以x^2，得$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx-\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$，有$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$，

令$\frac{y}{x}=u$，则$y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ，

那么$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}$， $x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$，

分离变量：$udu=\frac{dx}{x}$ ，

两边积分：$\int udu=\int\frac{dx}{x}$，

计算得：$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C_1$，

$u^2=2\ln|x|+C$（$C=2C_1$）

回代：$\left(\frac{y}{x}\right)^2=2\ln|x|+C$，即 $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$．

（3）$\left(x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$．

【解析】两边同除以 x^3，得 $\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]dx-3\left(\frac{y}{x}\right)^2dy=0$，有 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ，

那么 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2}$，即 $x\frac{du}{dx}=\frac{1-2u^3}{3u^2}$，

分离变量：$\frac{3u^2du}{1-2u^3}=\frac{dx}{x}$

$\frac{-6u^2du}{1-2u^3}=-2\frac{dx}{x}$

两边积分：$\int\frac{-6u^2du}{1-2u^3}=-2\int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{d(1-2u^3)}{1-2u^3}=-2\int\frac{dx}{x}$

计算得：$\ln\left|1-2u^3\right|=-2\ln|x|+C_1$

$\left|1-2u^3\right|=e^{C_1}\cdot\frac{1}{x^2}$

$1-2u^3=\pm e^{C_1}\cdot\frac{1}{x^2}$

$1-2u^3=C\cdot\frac{1}{x^2}$（$C$ 为任意常数，事实上，$1-2u^3=0$ 也满足原方程）

回代：$1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{C}{x^2}$

即 $x^3-2y^3=Cx$．

4．求下列齐次方程满足所给初始条件的特解：

（1）$\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0, y\big|_{x=0}=1$；

【解析】两边同除以 x^2，得 $\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\right]dy+2\frac{y}{x}dx=0$，有 $\frac{dy}{dx}=\frac{2\frac{y}{x}}{3-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ，

那么 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{3-u^2}$ ，即 $x\frac{du}{dx}=\frac{u^3-u}{3-u^2}$ ，

分离变量：$\frac{(3-u^2)du}{u^3-u}=\frac{dx}{x}$，

两边积分：$\int\frac{(3-u^2)du}{u^3-u}=\int\frac{dx}{x}$

$$\int\left(\frac{-3}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)du=\int\frac{dx}{x}$$

计算得：$-3\ln u+\ln(u-1)+\ln(u+1)=\ln x+\ln C$

$$\frac{(u-1)(u+1)}{u^3}=Cx$$

回代：$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}=Cx$

即 $y^2-x^2=Cy^3$ ，

因为 $y|_{x=0}=1$，所以 $C=1$，

所以特解为 $y^2-x^2=y^3$.

（2）$\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)dy=0, y|_{x=1}=1$.

【解析】两边同除以 x^2，得 $\left[1+2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx+\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}-1\right]dy=0$，有 $\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}-1}$ ，

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ，

那么 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}$，即 $x\frac{du}{dx}=\frac{-u^3-u^2-u-1}{u^2+2u-1}$

分离变量：$\frac{(u^2+2u-1)du}{u^3+u^2+u+1}=-\frac{dx}{x}$

两边积分：$\int\frac{(u^2+2u-1)du}{u^3+u^2+u+1}=-\int\frac{dx}{x}$

$$\int\left(\frac{-1}{u+1}+\frac{2u}{u^2+1}\right)du=-\int\frac{dx}{x}$$

计算得：$-\ln(u+1)+\ln(u^2+1)=-\ln x+\ln C$

$$\frac{u^2+1}{u+1}=\frac{C}{x}$$

$$x\frac{u^2+1}{u+1}=C$$

回代：$\dfrac{y^2+x^2}{y+x}=C$

因为 $y|_{x=1}=1$，所以 $C=1$，

所以特解为 $\dfrac{y^2+x^2}{y+x}=1$.

5．求下列微分方程的通解：

（1）$\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$；

【解析】$P(x)=1$，$Q(x)=e^{-x}$，

一阶非齐次线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

即 $y=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\int dx+C\right)=e^{-x}(x+C)$，

因此，此微分方程的通解为 $y=e^{-x}(x+C)$.

（2）$xy'+y=x^2+3x+2$；

【解析】方程两边同除以 x，得 $y'+\dfrac{1}{x}\cdot y=x+3+\dfrac{2}{x}$，

$P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=x+3+\dfrac{2}{x}$，

一阶非齐次线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

即 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(x+3+\dfrac{2}{x}\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\dfrac{1}{x}\left[\int\left(x+3+\dfrac{2}{x}\right)xdx+C\right]=\dfrac{1}{x}\left[\int\left(x^2+3x+2\right)dx+C\right]$

$=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+2x+C\right)$，

所以，原微分方程的通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{3}{2}x+2+\dfrac{C}{x}$.

（3）$\left(x^2-1\right)y'+2xy-\cos x=0$；

【解析】方程两边同除以 $\left(x^2-1\right)$，并移项得，$y'+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$，

$P(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$，$Q(x)=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$，

一阶非齐次线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

即 $y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x^2-1}\left(\int\cos xdx+C\right)=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$，

所以，原微分方程通解为 $y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$.

（4）$(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$；

【解析】方程两边同除以 $(x-2)$，并移项得 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$，

$P(x)=-\frac{1}{x-2}$，$Q(x)=2(x-2)^2$，

一阶非齐次线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$，

即 $y=e^{\int\frac{1}{x-2}dx}\left(2\int(x-2)^2e^{-\int\frac{1}{x-2}dx}dx+C\right)=(x-2)\left(2\int(x-2)dx+C\right)=(x-2)(x^2-4x+C)$，

所以，原微分方程的通解为 $y=(x-2)(x^2-4x+C)$.

6．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x, y|_{x=0}=0$；

【解析】$P(x)=-\tan x$，$Q(x)=\sec x$，

一阶非齐次线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$，

即

$$y=e^{\int\tan xdx}\left(\int\sec xe^{-\int\tan xdx}dx+C\right)=e^{-\int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{\int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)}dx+C\right)=\frac{1}{\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\cos xdx+C\right)$$

$=\frac{1}{\cos x}(x+C)$，

所以通解为 $y=\frac{1}{\cos x}(x+C)$，因为 $y|_{x=0}=0$，所以 $C=0$，特解为 $y=\frac{x}{\cos x}$.

（2）$\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}, y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$；

【解析】$P(x)=\cot x$，$Q(x)=5e^{\cos x}$，

一阶非齐次线性微分方程的通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$，

即 $y=e^{-\int\cot xdx}\left(5\int e^{\cos x}e^{\int\cot xdx}dx+C\right)=e^{-\int\frac{1}{\sin x}d(\sin x)}\left(5\int e^{\cos x}e^{\int\frac{1}{\sin x}d(\sin x)}dx+C\right)$

$=\frac{1}{\sin x}\left(5\int e^{\cos x}\cdot\sin xdx+C\right)=\frac{1}{\sin x}\left(-5e^{\cos x}+C\right)$，

通解为 $y=\frac{1}{\sin x}\left(-5e^{\cos x}+C\right)$，因为 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$，所以 $C=1$，特解为 $y=\frac{1}{\sin x}\left(-5e^{\cos x}+1\right)$，也即 $y\sin x+5e^{\cos x}=1$.

习题 6.3

1．求下列各微分方程的通解：

（1）$y''=x+\sin x$；

【解析】两边积分得，$y'=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$

对上式两边积分，$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$

（2）$y''=\frac{1}{1+x^2}$；

【解析】两边积分得，$y'=\arctan x+C_1$

对上式两边积分，$y=\int\arctan xdx+C_1x$

令 $\arctan x=u$，则 $x=\tan u$，$u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\int\arctan xdx=\int ud(\tan u)=u\tan u-\int\tan udu=u\tan u+\ln(\cos u)+C_2=x\arctan x+\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C_2$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_2$，

所以原微分方程的通解为 $y==x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_1x+C_2$

（3）$y''=y'+x$；

【解析】令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$，所以原方程变为 $\frac{dp}{dx}=p+x$，将其看成关于 x，p 的一阶线性微分方程，可得 $p=e^{\int dx}\left(\int xe^{-\int dx}dx+C_1\right)=e^x\left(\int xe^{-x}dx+C_1\right)=e^x\left(-\int xd(e^{-x})+C_1\right)$

$=e^x\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx+C_1\right)=e^x\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)$，

由 $y'=e^x\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)$ 两边关于 x 积分可得：$y=\int(-x-1+C_1e^x)dx=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^x+C_2$，

因此，原微分方程的通解为 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^x+C_2$.

2．求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y^3y''+1=0$，$y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=0$；

【解析】$y^3y''+1=0$，即 $y''=-\frac{1}{y^3}$，令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ ，

所以 $p\frac{dp}{dy}=-\frac{1}{y^3}$，有 $\int pdp=-\int\frac{1}{y^3}dy$，因而有 $\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}+C_1$，

因为 $y|_{x=1}=1$，$y'|_{x=1}=0$，将 $y=1$， $p=y'=0$，代入上式得， $C_1=-\frac{1}{2}$，

从而有 $p^2=\frac{1}{y^2}-1$ ， $p=\pm\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$ ， $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$，分离变量得：$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx$，

两边积分得： $\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\int dx$，计算得：$\mp\sqrt{1-y^2}=x+C$，两边平方，可得

$1-y^2=(x+C)^2$， $y^2=1-(x+C)^2$，因 $y|_{x=1}=1$，得 $C=-1$，且 $y=\sqrt{2x-x^2}$.

（2）$y'''=e^{ax}$，$y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$；

【解析】$y'''=e^{ax}$ 两边接连积分，得 $y''=\frac{1}{a}e^{ax}+C_1$， $y'=\frac{1}{a^2}e^{ax}+C_1x+C_2$，

通解 $y=\frac{1}{a^3}e^{ax}+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$，因为 $y|_{x=1}=y'|_{x=1}=y''|_{x=1}=0$，可得 $C_1=-\frac{1}{a}e^a$，

$C_2=\frac{e^a}{a^2}(a-1)$ ，$C_3=\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$，因此特解为

$y=\frac{1}{a^3}e^{ax}-\frac{e^a}{2a}x^2+\frac{e^a}{a^2}(a-1)x+\frac{e^a}{2a^3}(2a-a^2-2)$.

（3）$y''=3\sqrt{y}$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$.

【解析】令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，因此有

$p\frac{dp}{dy}=3\sqrt{y}$，有 $\int pdp=3\int\sqrt{y}dy$，因而有 $\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+C_1$，

因为 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$，将 $y=1$， $p=y'=2$，代入上式得 $C_1=0$，于是 $\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}$，即

$p^2=4y^{\frac{3}{2}}$ ， $y'=2y^{\frac{3}{4}}$ ，分离变量得：$\frac{dy}{y^{\frac{3}{4}}}=2dx$，两边积分得：$\int\frac{dy}{y^{\frac{3}{4}}}=2\int dx$，计算得：

$4y^{\frac{1}{4}}=2x+C$，将 $y|_{x=0}=1$ 代入上式，知 $C=4$，因此 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+4$，也即 $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$.

习题 6.4

1．下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的？

（1）x,x^2；

因 $\dfrac{x^2}{x}=x$ 不是常数，所以 x,x^2 在定义区间内线性无关。

（2）$x,2x$；

因 $\dfrac{2x}{x}=2$ 是常数，所以 $x,2x$ 在定义区间内线性相关。

（3）$e^{2x},3e^{2x}$；

因 $\dfrac{3e^{2x}}{e^{2x}}=3$ 是常数，所以 $e^{2x},3e^{2x}$ 在定义区间内线性相关。

（4）e^{-x},e^{x}；

因 $\dfrac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$ 不是常数，所以 e^{-x},e^{x} 在定义区间内线性无关。

（5）$\cos 2x,\sin 2x$；

因 $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$ 不是常数，所以 $\cos 2x,\sin 2x$ 在定义区间内线性无关。

（6）e^{x^2},xe^{x^2}；

因 $\dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}}=x$ 不是常数，所以 e^{x^2},xe^{x^2} 在定义区间内线性无关。

（7）$\sin 2x,\cos x\sin x$；

因 $\dfrac{\cos x\sin x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}$ 是常数，所以 $\sin 2x,\cos x\sin x$ 在定义区间内线性相关。

（8）$e^x\cos 2x,e^x\sin 2x$；

因 $\dfrac{e^x\sin 2x}{e^x\cos 2x}=\tan 2x$ 不是常数，所以 $e^x\cos 2x,e^x\sin 2x$ 在定义区间内线性无关。

（9）$\ln x,x\ln x$；

因 $\dfrac{x\ln x}{\ln x}=x$ 不是常数，所以 $\ln x,x\ln x$ 在定义区间内线性无关。

（10）$e^{ax},e^{bx}(a\neq b)$.

因 $\dfrac{e^{bx}}{e^{ax}}=e^{(b-a)x}$ 不是常数，所以 $e^{ax},e^{bx}(a\neq b)$ 在定义区间内线性无关。

2．验证 $y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解，并写出该方程的通解。

【解析】将 $y_1=\cos\omega x$ 代入方程 $y''+\omega^2 y=0$，左边等于右边，同理，将 $y_2=\sin\omega x$ 代入方程也成立。所以，$y_1=\cos\omega x$ 及 $y_2=\sin\omega x$ 都是方程 $y''+\omega^2 y=0$ 的解。又因为 $y_1=\cos\omega x$ 与 $y_2=\sin\omega x$ 线性无关，所以该方程的通解为 $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$。

3．验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+\left(4x^2-2\right)y=0$ 的解，并写出该方程的通解。

【解析】将 $y_1=e^{x^2}$ 代入方程 $y''-4xy'+\left(4x^2-2\right)y=0$，左边等于右边，同理，将 $y_2=xe^{x^2}$ 代入方程，也成立。因此，$y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+\left(4x^2-2\right)y=0$ 的解。又 $y_1=e^{x^2}$ 与 $y_2=xe^{x^2}$ 线性无关，所以该方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_2xe^{x^2}$。

4．验证：

（1）$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解；

【解析】将 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 代入方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$，左边

$$=\left(C_1e^x+2C_2e^{2x}+\frac{5}{12}e^{5x}\right)'-3\left(C_1e^x+2C_2e^{2x}+\frac{5}{12}e^{5x}\right)+2\left(C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}\right)$$

$=C_1e^x+4C_2e^{2x}+\frac{25}{12}e^{5x}-3C_1e^x-6C_2e^{2x}-\frac{15}{12}e^{5x}+2C_1e^x+2C_2e^{2x}+\frac{1}{6}e^{5x}=e^{5x}$，等于等号右边，又因为解 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ 中含有两个不能合并的任意常数，所以 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$（$C_1$、$C_2$ 是任意常数）是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解。

（2）$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$（C_1、C_2 是任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解。

【解析】将 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ 代入方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$，左边

$$=x^2\left(2C_1x+2C_2x\ln x+C_2x\right)'-3x\left(2C_1x+2C_2x\ln x+C_2x\right)+4\left(C_1x^2+C_2x^2\ln x\right)$$

$=x^2\left(2C_1+2C_2\ln x+2C_2+C_2\right)-6C_1x^2-6C_2x^2\ln x-3C_2x^2+4C_1x^2+4C_2x^2\ln x=0$，等于等号右边，且解 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$ 中含有两个不能合并的任意常数，所以 $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x$（C_1、C_2 是任意常数）是方程 $x^2y''-3xy'+4y=0$ 的通解。

习题 6.5

1．求下列微分方程的通解：

（1）$y''+y'-2y=0$；

【解析】所给微分方程的特征方程为$r^2+r-2=0$，即$(r+2)(r-1)=0$，两个特征根$r_1=-2,r_2=1$，从而微分方程的通解为$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$ 。

（2）$y''+y=0$；

【解析】所给微分方程的特征方程为$r^2+1=0$，特征根$r=\pm i$，从而微分方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$。

（3）$4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$.

【解析】所给微分方程的特征方程为$4r^2-20r+25=0$，得$r_1=r_2=\dfrac{5}{2}$，那么微分方程的通解为$x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$。

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y''-4y'+3y=0, y\big|_{x=0}=6, y'\big|_{x=0}=10$；

【解析】特征方程$r^2-4r+3=0$，特征根为$r_1=1,r_2=3$，所以，通解为$y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$，又因为$y\big|_{x=0}=6, y'\big|_{x=0}=10$，解得$C_1=4,C_2=2$，从而特解为$y=4e^{x}+2e^{3x}$。

（2）$y''-3y'-4y=0, y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=-5$；

【解析】特征方程$r^2-3r+4=0$，特征根为$r_1=-1,r_2=4$，所以，通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$，又因为$y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=-5$，解得$C_1=1,C_2=-1$，从而特解为$y=e^{-x}-e^{4x}$ 。

（3）$y''+25y=0, y\big|_{x=0}=2, y'\big|_{x=0}=5$.

【解析】特征方程为$r^2+25=0$，特征根为$r=\pm 5i$，所以通解为$y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$，因$y\big|_{x=0}=2, y'\big|_{x=0}=5$，解得$C_1=2,C_2=1$，因此特解为$y=2\cos 5x+\sin 5x$。

3．求下列微分方程的通解：

（1）$2y''+y'-y=2e^{x}$；

【解析】对应的齐次方程$2y''+y'-y=0$，它的特征方程为$2r^2+r-1=0$，解得特征根$r_1=-1,r_2=\dfrac{1}{2}$，

因此齐次方程的通解为$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$。观察原微分方程的等号右边，$\lambda=1$，不是特征方程的根，故设特解为$y^*=b_0e^x$，将$y^*=b_0e^x$代入微分方程$2y''+y'-y=2e^x$，解得$b_0=1$，因此有特解$y^*=e^x$，故原微分方程的通解为$y=y^*+Y=e^x+C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$。

（2）$2y''+5y'=5x^2-2x-1$；

【解析】对应的齐次方程为$2y''+5y'=0$，它的特征方程为$2r^2+5r=0$，解得特征根是$r_1=0,r_2=-\frac{5}{2}$，因此齐次方程的通解为$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}$。观察原微分方程的等号右边，$\lambda=0$，是特征方程的单根，故设特解为$y^*=x(b_2x^2+b_1x+b_0)$，将$y^*=x(b_2x^2+b_1x+b_0)$代入微分方程$2y''+5y'=5x^2-2x-1$，解得$b_0=\frac{7}{25},b_1=-\frac{3}{5},b_2=\frac{1}{3}$，因此特解为$y^*=x\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{7}{25}\right)$，故原微分方程的通解为$y=y^*+Y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x+C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}$。

（3）$y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$.

【解析】对应的齐次方程为$y''-2y'+5y=0$，它的特征方程为$r^2-2r+5=0$，解得$r=1\pm 2i$，故齐次方程的通解为$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$。观察原微分方程的等号右边，$\lambda=1$，$\omega=2$，$1+2i$是特征方程的单根，故设原微分方程的特解为$y^*=xe^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$，代入原微分方程，得到$a=-\frac{1}{4},b=0$，因此原微分方程的特解为$y^*=xe^x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)$，故原微分方程的通解为$y=y^*+Y=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x+e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$。

4．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y''-10y'+9y=e^{2x},y|_{x=0}=\frac{6}{7},y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$；

【解析】对应的齐次方程为$y''-10y'+9y=0$，它的特征方程为$r^2-10r+9=0$，特征根为$r_1=1,r_2=9$，故齐次方程的通解为$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}$。观察原微分方程的等号右边，$\lambda=2$，不是特征方程的根，故设特解为$y^*=b_0e^{2x}$，将$y^*=b_0e^{2x}$代入原微分方程，解得$b_0=-\frac{1}{7}$，故原微分方程有特解$y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$，通解为$y=y^*+Y=-\frac{1}{7}e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{9x}$。又因为初始条件$y|_{x=0}=\frac{6}{7},y'|_{x=0}=\frac{33}{7}$，解得$C_1=\frac{1}{2},C_2=\frac{1}{2}$，所以满足所给初始条件的特解为$y=-\frac{1}{7}e^{2x}+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{9x}$。

（2）$y''+y=-\sin 2x, y\big|_{x=0}=-1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{3}$.

【解析】对应的齐次方程为$y''+y=0$，它的特征方程为$r^2+1=0$，特征根为$r=\pm i$，故齐次方程的通解为$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$。观察原微分方程的等号右边，$\lambda=0$，$\omega=2$，$0+2i$不是特征方程的根，故设原微分方程有特解$y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$，将$y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$代入原微分方程，可解得$a=0, b=\frac{1}{3}$，所以原微分方程有特解$y^*=\frac{1}{3}\sin 2x$，通解为$y=y^*+Y=\frac{1}{3}\sin 2x+C_1\cos x+C_2\sin x$。又因为初始条件$y\big|_{x=0}=-1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{3}$，解得$C_1=-1, C_2=-\frac{1}{3}$，所以满足所给初始条件的特解为$y=y^*+Y=\frac{1}{3}\sin 2x-\cos x-\frac{1}{3}\sin x$。

第六章　复习题

1.微分方程$xy'-y=x^2$满足$y(1)=2$的特解________.

【解析】$\because y'-\frac{1}{x}y=x$

$\therefore y=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=x(x+C)$

$\because y\big|_{x=1}=2\Rightarrow C=1, \therefore y=x(x+1)$.

2.求微分方程$x^2y'+2xy=\sin x$满足条件$y(\pi)=0$的解.

【解析】$x^2y'+2xy=(x^2y)'=\sin x\Rightarrow x^2y=\int\sin x dx=-\cos x+C$

$y(\pi)=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow y=-\dfrac{1+\cos x}{x^2}$.

3.求微分方程$\left(y^3-2x^2y\right)dx+2x^3dy=0$的通解.

【解析】方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{y}{x})^3$

令$\dfrac{y}{x}=u, \Rightarrow y=xu, \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ 代入原方程

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\frac{1}{2}u^3\Rightarrow\frac{-2}{u^3}du=\frac{1}{x}dx\Rightarrow\frac{1}{u^2}=\ln|x|+C\Rightarrow y^2=\frac{x^2}{\ln|x|+C}.$$

4.已知函数$y=(x+1)e^x$是一阶线性微分方程$y'+2y=f(x)$的解，求二阶常系数线性微分方程

$y''+3y'+2y=f(x)$ 的通解.

【解析】由已知可得 $f(x)=e^x+(x+1)e^x+2(x+1)e^x=(3x+4)e^x$

特征方程：$r^2+3r+2=0$，齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

令特解 $y^*=(Ax+B)e^x$ 代入原方程得：

$6Ax+5A+6B=3x+4\Rightarrow A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{4}$

通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})e^x$.

5.微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$ 的通解为________________ .

【解析】设 $\frac{y}{x}=u,y=xu,y'=u+xu'$ 代入

$u+xu'=1+u$

$u'=\frac{1}{x}$

$u=\ln|x|+C\Rightarrow y=x\ln|x|+Cx$.

6.已知函数 $y=f(x)$ 是一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=y$ 满足 $y(0)=1$ 的特解，求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-3y'+2y=f(x)$ 的通解.

【解析】由 $\frac{dy}{dx}=y$，可知 $\frac{1}{y}dy=dx,\ln|y|=x+C_1,y=Ce^x$

由 $y(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow y=e^x$， $y''-3y'+2y=e^x$

$r^2-3r+2=0\Rightarrow r_1=1,r_2=2$ 齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

令 $y^*=xAe^x\Rightarrow y'=Ae^x+xAe^x,y''=2Ae^x+xAe^x$ 代入原方程

$-Ae^x=e^x,A=-1$

$\therefore$ 通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}-xe^x$.

7.求微分方程 $y''-2y'=xe^{3x}$ 的通解.

【解析】方程对应齐次方程为 $y''-2y'=0$

它的特征方程为 $r^2-2r=0\Rightarrow r_1=0,r_2=2$

所得方程对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1+C_2e^{2x}$

$\because f(x)=xe^{3x},\lambda=3$ 不是特征方程的根

$\therefore$ 令 $y^*=(ax+b)e^{3x}\Rightarrow(y^*)'=ae^{3x}+3(ax+b)e^{3x}$

$(y^*)''=3ae^{3x}+3ae^{3x}+9(ax+b)e^{3x}=6ae^{3x}+9(ax+b)e^{3x}$

$6ae^{3x}+9(ax+b)e^{3x}-2ae^{3x}-6(ax+b)e^{3x}=xe^{3x}$

$4ae^{3x}+3(ax+b)e^{3x}=xe^{3x}\Rightarrow(4a+3b)e^{3x}+3axe^{3x}=xe^{3x}$

$\begin{cases}4a+3b=0\\3a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$ 通解为 $y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2e^{2x}+\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{9}\right)e^{3x}$.

8.已知 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^{3x}$ 是微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解，求该微分方程.

【解析】$\because r_1=1,r_2=2,\Rightarrow r^2+pr+q=0$ 的两个实数根 $\therefore p=-3,q=2$.

$\because y^*=x\cdot e^{3x}$ 是方程的解

$\therefore (y^*)'=e^{3x}+3xe^{3x},(y^*)''=3e^{3x}+3e^{3x}+9xe^{3x}=6e^{3x}+9xe^{3x}$ 代入方程可得

$f(x)=3e^{3x}+2xe^{3x}$

微分方程为 $y''-3y'+2y=(2x+3)e^{3x}$.

9.二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-y'-2y=2xe^{-x}$ 的特解的正确形式为（　）

A. Axe^{-x}　　B. Ax^2e^{-x}　　C. $(Ax+B)e^{-x}$　　D. $x(Ax+B)e^{-x}$

【正确答案】D

【解析】$y''-y'-2y=2xe^{-x}$ 得特征方程：$r^2-r-2=0\Rightarrow r=-1,2$

$\therefore y^*=x(Ax+B)e^{-x}$.

10.求微分方程 $y''-2y'+3y=3x$ 是通解.

【解析】

$r^2-2r+3=0$

$\therefore r=\dfrac{2\pm\sqrt{4-12}}{2}=1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore$ 齐次方程的通解为 $y=e^{x}\left(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x\right)$

$f(x)=3x=3xe^{0\cdot x}$

令特解 $y^*=ax+b$

$(y^*)'=a,(y^*)''=0$ 代入

$\therefore 0-2a+3ax+3b=3x$

$\therefore\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

$\therefore$ 通解为 $y=e^{x}\left(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x\right)+x+\dfrac{2}{3}$.

第七章　无穷级数

习题 7.1

1. 写出下列级数的前五项

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

【正确答案】$\frac{4}{1};\frac{4\cdot 7}{1\cdot 3};\frac{4\cdot 7\cdot 10}{1\cdot 3\cdot 5};\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7};\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 16}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

【正确答案】$\frac{1}{5};-\frac{1}{5^2};\frac{1}{5^3};-\frac{1}{5^4};\frac{1}{5^5}$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

【正确答案】$\frac{1!}{1^1};\frac{2!}{2^2};\frac{3!}{3^3};\frac{4!}{4^4};\frac{5!}{5^5}$

2. 写出下列级数的一般项

（1）$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots$

【正确答案】$\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

（2）$\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$

【正确答案】$\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

（3）$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{10}+\frac{7}{17}+\cdots$

【正确答案】$\frac{2n-1}{n^2+1}$

（4）$\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$

【正确答案】$(-1)^{n-1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$

3. 判定下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}5\cdot\frac{1}{a^n}$（$a>0$）

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}5\cdot\frac{1}{a^n}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$是公比为$\frac{1}{a}$的几何级数，所以$a>1$收敛，$0<a\le 1$发散。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

【解析】因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$的前$n$项和为

$s_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$，当$n\to\infty$时，$s_n$极限不存在，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$发散。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$

【解析】因为$\frac{1}{n+3}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$发散。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$均为几何级数，且收敛，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n-\ln(n+1))$，即前$n$项和为

$s_n=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 4+\cdots+\ln n-\ln(n+1)=-\ln(n+1)$，当$n\to\infty$时，$s_n$极限不存在，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$发散。

（6）$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

【解析】$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，该级数的前$n$项和为

$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$，

因为$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$，所以级数$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$收敛。

（7）$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$

【解析】因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1$，根据级数收敛的必要条件知，级数$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$发散。

（8）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n+1}$

【解析】因为当 $n\to\infty$ 时，通项 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}n}{2n+1}$ 的极限不存在，根据级数收敛的必要条件知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n+1}$ 发散。

习题 7.2

1．判定下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

【解析】级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 的前 n 项和为 $s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$ ，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 收敛。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$

【解析】因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1$，根据级数收敛的必要条件知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 发散。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$

【解析】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，且调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$ 发散。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

【解析】$\frac{1}{\sqrt{n\left(n^{2}+1\right)}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(n \to \infty)$，因为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$是$p>1$的$p-$级数，收敛，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\left(n^{2}+1\right)}}$收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^{n}}$　（$a>0$）

【解析】$0<a \leq 1$时，$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+a^{n}} \neq 0$，根据级数收敛的必要条件知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^{n}}$发散；$a>1$时，$\frac{1}{1+a^{n}} \sim \frac{1}{a^{n}}(n \to \infty)$，因为$a>1$时，几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^{n}}$收敛。

（6）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+b)^{n}}$

【解析】看成几何级数，易得$|a+b|>1$时收敛；其余情况下发散。

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{2}+a}-\sqrt{n^{2}-a}\right)$　（$a>0$）

【解析】$\sqrt{n^{2}+a}-\sqrt{n^{2}-a}=\frac{2a}{\sqrt{n^{2}+a}+\sqrt{n^{2}-a}} \sim \frac{a}{n}(n \to \infty)$，因为调和级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{2}+a}-\sqrt{n^{2}-a}\right)$发散。

（8）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^{4}-1}$

【解析】$\frac{n+1}{2n^{4}-1} \sim \frac{n}{2n^{4}}=\frac{1}{2n^{3}}(n \to \infty)$，因为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3}}$是$p>1$的$p-$级数，收敛，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^{4}-1}$收敛。

（9）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}}{n \cdot 2^{n}}$

【解析】$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_{n}}=\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^{n}}{3^{n}}=\frac{3}{2}>1$，根据比值判别法，级数发散。

（10）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n}}{n!}$

【解析】$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_{n}}=\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n}}=e>1$，根据比值判别法，级数发散。

（11）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+1)}$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4}=\frac{2}{3}<1$，根据比值判别法，级数收敛。

（12）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{1}{3}<1$，根据比值判别法，级数收敛。

（13）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}\cdot\frac{2^{n^2}}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1$，根据比值判别法，级数收敛。

（14）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，根据根式判别法，级数收敛。

（15）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

【解析】$2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\sim\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n(n\to\infty)$，几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，所以原级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$收敛。

（16）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$，由根式判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛；又$\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\leq\frac{n}{2^n}$，根据正项级数的比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$也收敛。

2．判定下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

【解析】因为 $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，由莱布尼兹判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛；但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是 $p<1$ 的 $p-$ 级数，发散。所以，原级数条件收敛。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$

【解析】因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}}=\frac{1}{2}<1$，由根式判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ 收敛。所以，原级数绝对收敛。

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

【解析】令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{-x+1}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$，当 $x\geq 1$ 时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$ 单调递减，所以数列 $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ 单调递减，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$，由莱布尼兹判别法知，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 收敛。因为 $\frac{\sqrt{n}}{n+1}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 发散。所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 条件收敛。

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

【解析】因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 是公比为 $\frac{2}{3}$ 的几何级数，是收敛的，所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 绝对收敛。

（5）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

【解析】因为 $\frac{1}{\ln(n+1)}\geq\frac{1}{\ln(n+2)}$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$，由莱布尼兹判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 收敛，又 $\frac{1}{\ln(n+1)}\geq\frac{1}{n}$，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故根据比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ 发散。

所以，原级数条件收敛。

（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^3}}$

【解析】$\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^3}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$是$p>1$的$p-$级数，收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^3}}\right|$收敛，所以原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n^3}}$绝对收敛。

习题 7.3

1．求下列幂级数的收敛域

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$，所以收敛半径为 1，且当$x=-1$和$x=1$时级数均发散，所以该幂级数的收敛域为$(-1,1)$。

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!} = 0$，所以该幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n n^2}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n^2}{2^{n+1}(n+1)^2} = \dfrac{1}{2}$，所以收敛半径为 2，当$x=-2$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$，根据莱布尼兹判别法知收敛，当$x=2$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，也是收敛的。所以该幂级数的收敛域为$[-2,2]$。

（4）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

【解析】所给幂级数缺少x的偶次幂项，是一个缺项幂级数，因此不能直接利用公式求收敛半径R。我们考虑级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x^{2n+1}|}{2n+1}$，对此正项级数利用比值审敛法

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{|x^{2n+3}|}{2(n+1)+1}}{\dfrac{|x^{2n+1}|}{2n+1}}=x^2$，根据比值审敛法，当 $x^2<1$ 时，即 $-1<x<1$ 时，幂级数收敛。又我们可以验证当 $x=-1$ 时，级数为 $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 收敛；当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$，也收敛。故收敛域为 $[-1,1]$。

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$，所以收敛半径为 2，收敛区间为 $(-4,0)$，且当 $x=-4$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛，当 $x=0$ 时，级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散。所以该幂级数的收敛域为 $[-4,0)$。

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}(x-1)^n$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{2^n}=2$，所以收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛，当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，级数为调和级数，发散。所以该幂级数的收敛域为 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$。

第七章　复习题

1.下列级数中收敛的是（　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$

【正确答案】D

【解析】A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$ P 级数收敛，调和级数发散，所以该级数发散

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\neq 0$ 发散

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!2^n}{(n)!2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2}=+\infty$ 发散

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{\sqrt{n}}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}}=\dfrac{1}{3}<1$ 收敛

2.下列级数中发散的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}$

【正确答案】D

【解析】 A. 根据莱布尼兹审敛法，收敛

B. $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$，几何级数和 P 级数收敛，所以该级数收敛

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{(n+1)^2}=2>1$ 发散

3.无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2n}$ ________（填写收敛或发散）.

【正确答案】发散

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，根据莱布尼兹判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，且我们已知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以原级数发散。

4.若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，则常数 p 的取值范围（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $(0,1)$

【正确答案】C

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散，$\therefore p\le1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$，要使 $\dfrac{1}{n^p}$ 单调减趋向于 $0(n\to\infty)$，则有 $p>0$.

5.设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\upsilon_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，则（　）

A.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n$ 都收敛　　B.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n$ 都发散

C.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n$ 发散　　D.级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n$ 收敛

【正确答案】C

【解析】当 $n\to\infty$，$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 单调递减，并趋于 0，从而有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

当 $n\to\infty$，$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n$ 发散

6.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域为____________________

【正确答案】$[-1,1)$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right|=1$

且 $x=-1$ 时收敛；$x=1$ 时发散。

7.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n}(x-3)^n$ 的收敛域为____________________

【正确答案】$(0,6]$

【解析】$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 3^n}{(x-3)^n}\right|<1=\left|\frac{x-3}{3}\right|<1\Rightarrow 0<x<6$

$x=0$ 发散；$x=6$ 收敛　$\therefore$ 收敛域为 $(0,6]$

8.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 的收敛域为(　　).

A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

【正确答案】A

【解析】$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛

$x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$p$ 级数且 $p>1$ 收敛

9.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^n$ 的收敛半径为______________.

【正确答案】4

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}}\right|=\frac{1}{4},\therefore R=4$

10.下列级数中绝对收敛的是(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2(-1)^n}{n}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^3}$

【正确答案】C

【解析】$\because\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$　　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛　　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛

11.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n5^n}$ 的收敛域为____________.

【正确答案】$[-9,1)$

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{(x+4)^{n+1}}{(n+1)\cdot5^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot5^n}{(x+4)^n}\right|=\frac{1}{5}|x+4|<1$　　得 $-9<x<1$

当 $x=-9$ 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n\cdot5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛　　当 $x=1$ 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\cdot5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore$ 收敛域为 $[-9,1)$

12.若函数 $f(x)=\frac{1}{2+x}$ 的幂级数展开式为 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (-2<x<2)$，则常数 $a_n=$（　　）

A. $\frac{1}{2^n}$　　B. $\frac{2}{2^{n+1}}$　　C. $\frac{(-1)^n}{2^n}$　　D. $\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

【正确答案】D

【解析】$y=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$

第八章 多元函数微积分

习题 8.1

1．设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$，求

（1）在点 $(-2,3)$ 和点 (a,a)（$a>0$）处的函数值

（2）$\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

（3）$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$ 及 $f(tx,ty)$

【解析】（1）$f(-2,3)=\dfrac{(-2)^2-3^2}{2\cdot(-2)\cdot 3}=\dfrac{5}{12}$；$f(a,a)=\dfrac{a^2-a^2}{2a\cdot a}=0$

（2）$f(x+\Delta x,y)=\dfrac{(x+\Delta x)^2-y^2}{2(x+\Delta x)y}$，$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\dfrac{(x+\Delta x)^2-y^2}{2(x+\Delta x)y}-\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$

$=\dfrac{x^3+2x^2\Delta x+x(\Delta x)^2-xy^2-x^3-x^2\Delta x+xy^2+(\Delta x)y^2}{2x(x+\Delta x)y}=\dfrac{x^2\Delta x+x(\Delta x)^2+(\Delta x)y^2}{2x(x+\Delta x)y}$，

所以 $\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\dfrac{x^2+x\Delta x+y^2}{2x(x+\Delta x)y}$

（3）$f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\dfrac{y}{x}}=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}=f(x,y)$；

$f(tx,ty)=\dfrac{(tx)^2-(ty)^2}{2\cdot tx\cdot ty}=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}=f(x,y)$

2．设 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$，求 $f(x,y)$

【解析】令 $u=x+y$，$v=x-y$，则 $x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$，所以有

$f(u,v)=\dfrac{u+v}{2}\cdot\dfrac{u-v}{2}+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2=\dfrac{u^2-uv}{2}$，那么 $f(x,y)=\dfrac{x^2-xy}{2}$。

3．设 $z=f(x+y)+x-y$，若当 $x=0$ 时，$z=y^2$，求函数 $f(x)$ 及 z.

【解析】当 $x=0$ 时，$z=f(y)-y=y^2$，即 $f(y)=y^2+y$，那么 $f(x)=x^2+x$。

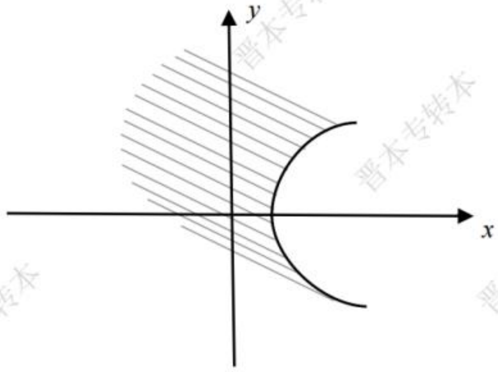
$z=f(x+y)+x-y=(x+y)^2+x+y+x-y=(x+y)^2+2x$。

4. 求下列各函数的定义域，并作出其定义域的图形.

（1）$z=\ln(y^2-2x+1)$；

【解析】$\{(x,y)|y^2-2x+1>0\}$

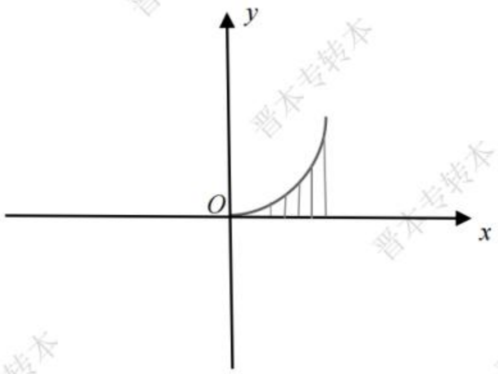
图形大致如下：



（2）$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

【解析】$\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, x^2\geq y\}$

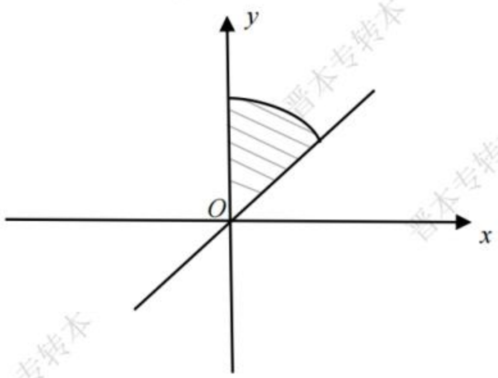
图形大致如下：



（3）$z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

【解析】$\{(x,y)|y>x, x\geq 0, x^2+y^2<1\}$

图形大致如下：



（4） $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

【解析】 $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2-z^2\geq 0,\ x^2+y^2\neq 0\right\}$，图形略。

5.求下列各二元极限 .

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$

【解析】 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{0^2+1^2}=1$

（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解析】 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln\left(1+e^0\right)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{x+y+4}}{x+y}$

【解析】 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{x+y+4}}{x+y}=2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\sqrt{\frac{x+y}{4}+1}}{x+y}=2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{8}(x+y)}{x+y}=-\frac{1}{4}$

（4） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2+y^2}}$

【解析】

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=0$$

习题 8.2

1．求下列函数的偏导数

（1） $z=x^3y-xy^3$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$； $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$

（2） $z=\frac{x+y}{x-y}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}=-\frac{2y}{(x-y)^2}$； $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x-y)-(x+y)(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2x}{(x-y)^2}$

（3） $z=\sqrt{\ln(xy)}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$； $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$

（4） $z=(\sin x)^{\cos y}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1}\cdot\cos x$； $\frac{\partial z}{\partial y}=(\sin x)^{\cos y}\ln(\sin x)\cdot(-\sin y)$

（5） $z=e^{\frac{x}{y}}\cdot\cos(x+y)$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot\cos(x+y)-e^{\frac{x}{y}}\cdot\sin(x+y)=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\cos(x+y)-e^{\frac{x}{y}}\sin(x+y)$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\cos(x+y)-e^{\frac{x}{y}}\cdot\sin(x+y)=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\cos(x+y)-e^{\frac{x}{y}}\sin(x+y)$$

（6） $z=\ln\tan\frac{x}{y}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$$

（7） $u=y^{\frac{z}{x}}$

【解析】 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^{\frac{z}{x}}\left(-\frac{z}{x^2}\right)\ln y$； $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{x}y^{\frac{z}{x}-1}$； $\frac{\partial u}{\partial z}=y^{\frac{z}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)\ln y$

（8） $u=\arctan(x-y)^z$

【解析】 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot z(x-y)^{z-1}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$；

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot z(x-y)^{z-1}\cdot(-1)=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}；$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot(x-y)^z\ln(x-y)=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$$

2．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x'(x,1)$

【解析】 $f_x'(x,y)=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{y}$，所以 $f_x'(x,1)=1$。

3．求下列函数的所有的二阶偏导数

（1）$z=x^4-4x^2y^2+y^4$

【解析】先算一阶偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$；$\frac{\partial z}{\partial y}=-8x^2y+4y^3$

再算二阶偏导数：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-8x^2+12y^2$

（2）$z=\sin^2(ax+by)$

【解析】先算一阶偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=2a\sin(ax+by)\cos(ax+by)=a\sin(2ax+2by)$ ；

$\frac{\partial z}{\partial y}=2b\sin(ax+by)\cos(ax+by)=b\sin(2ax+2by)$

再算二阶偏导数：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos(2ax+2by)$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ab\cos(2ax+2by)$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos(2ax+2by)$

（3）$z=\arctan\frac{y}{x}$

【解析】先算一阶偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ ；$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$

再算二阶偏导数：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

（4）$z=y^x$

【解析】先计算一阶偏导数：$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$ ；$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$

再算二阶偏导数：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$；$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$

4．求下列函数的全微分

（1）$z=xy+\frac{x}{y}$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$，所以全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy$。

（2）$z=\arcsin(xy)$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$，所以全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}dx+\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}dy$$ 。

（3）$z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

所以全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$ 。

5. 求函数 $z=x^2y^3$ 在点 $(2,-1)$ 处当 $\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$ 时的全增量与全微分.

【解析】全增量为 $\Delta z=2.02^2\cdot(-1.01)^3-2^2\cdot(-1)^3=-0.20404$；全微分为

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=2xy^3\Delta x+3x^2y^2\Delta y=-0.08-0.12=-0.2$ 。

6. 求函数 $z=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

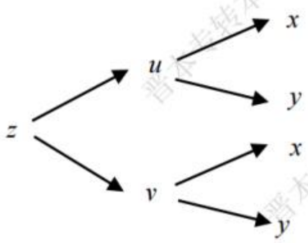
【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2}{3}$，所以函数 $z=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分 $dz=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$ 。

习题 8.3

1. 求下列函数对于各自变量的一阶偏导数.

（1）$z=u^2+v^2$，$u=x+y,v=x-y$

【解析】画出链式关系图：



根据链导法，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u+2v=4x$；$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u+2v\cdot(-1)=4y$

（2）$z=u^2\cdot\ln v,u=\frac{x}{y},v=3x-2y$

【解析】链式关系图同（1），根据链导法，有

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2}{y}u\ln v+\frac{3u^2}{v}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}u\ln v-\frac{2u^2}{v}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$$

（3）$z=e^{uv},u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\frac{y}{x}$

【解析】链式关系图同（1），根据链导法，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=ve^{uv}\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}+ue^{uv}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(vx-uy)\text{；}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=ve^{uv}\cdot\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}+ue^{uv}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{e^{uv}}{x^2+y^2}(vy+ux)$$

（4）$z=x^2y-xy^2,x=u\cdot\cos v,y=u\cdot\sin v$

【解析】链式关系图同（1），根据链导法，有

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=(2xy-y^2)\cos v+(x^2-2xy)\sin v\text{；}$$

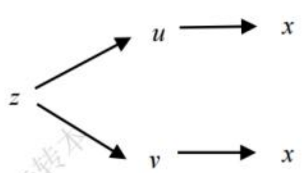
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=-(2xy-y^2)u\sin v+(x^2-2xy)u\cos v\text{。}$$

2. 求下列函数的全导数.

（1）$z=u^v(u>0)$，而 $u=\sin x$，$v=\cos x$，求 $\frac{dz}{dx}$

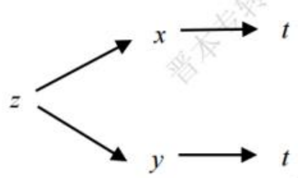
【解析】画出链式关系图：

由链导法，有



$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=vu^{v-1}\cdot\cos x+u^v\ln u\cdot(-\sin x)=\cos^2 x\cdot(\sin x)^{\cos x-1}-(\sin x)^{\cos x+1}\ln(\sin x)\text{。}$$

（2）$z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$，$y=4t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$

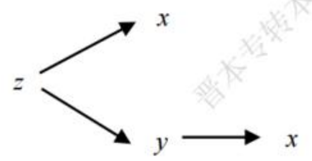


【解析】画出链式关系图：

由链导法，有 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{3}{\sqrt{1-(x-y)^2}}-\frac{12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$。

（3）$z=\arctan(xy)$，而 $y=e^{x}$，求 $\dfrac{dz}{dx}$

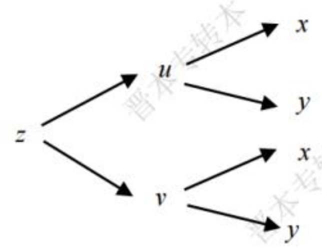
【解析】画出链式关系图：



由链导法，有 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{1+x^{2}y^{2}}+\dfrac{x}{1+x^{2}y^{2}}\cdot e^{x}=\dfrac{e^{x}(1+x)}{1+x^{2}e^{2x}}$。

3. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数).

（1）$z=f\left(x^{2}-y^{2},e^{xy}\right)$



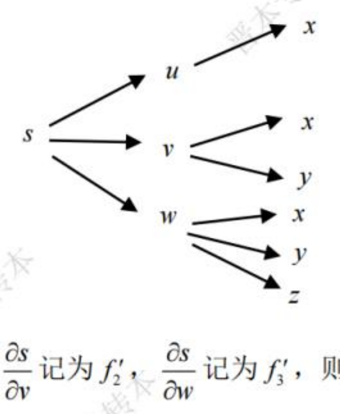
【解析】令 $u=x^{2}-y^{2}$，$v=e^{xy}$，则函数的链式关系可表示如下：

将 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ 记为 f_1'，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 记为 f_2'，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot ye^{xy}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot xe^{xy}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$。

（2）$s=f\left(x^{3},xy,xyz\right)$

【解析】令 $u=x^{3}$，$v=xy$，$w=xyz$，则函数的链式关系可表示如下：



将 $\dfrac{\partial s}{\partial u}$ 记为 f_1'，$\dfrac{\partial s}{\partial v}$ 记为 f_2'，$\dfrac{\partial s}{\partial w}$ 记为 f_3'，则可得 $\dfrac{\partial s}{\partial x}=f_1'\cdot 3x^{2}+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=3x^{2}f_1'+yf_2'+yzf_3'$；

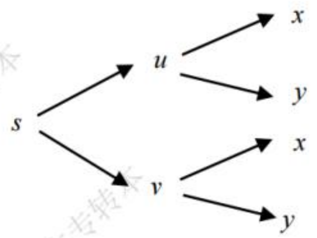
$\frac{\partial s}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_1'+yf_2'+xzf_3'$；$\frac{\partial s}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'$。

（3）$s=f\left(x^3+xy+xyz\right)$

【解析】将 $f'\left(x^3+xy+xyz\right)$ 简记为 f'，有 $\frac{\partial s}{\partial x}=f'\cdot(3x^2+y+yz)$；$\frac{\partial s}{\partial y}=f'\cdot(x+xz)$；$\frac{\partial s}{\partial z}=f'\cdot(xy)$。

（4）$z=xyf\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$

【解析】令 $s=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{x}\right)$，则 $z=xys$，再令 $u=\frac{x}{y}$，$v=\frac{y}{x}$，那么 s 与 x 和 y 的链式关系图如下所示：



将 $\frac{\partial s}{\partial u}$ 记为 f_1'，$\frac{\partial s}{\partial v}$ 记为 f_2'，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf+xy\left(f_1'\cdot\frac{1}{y}-f_2'\cdot\frac{y}{x^2}\right)$；$\frac{\partial z}{\partial y}=xf+xy\left(-f_1'\cdot\frac{x}{y^2}+f_2'\cdot\frac{1}{x}\right)$。

4．设 $z=f\left(x^2+y^2\right)$，其中 f 具有二阶导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial z}{\partial y^2}$

【解析】将 $f'\left(x^2+y^2\right)$ 简记为 f'，将 $f''\left(x^2+y^2\right)$ 简记为 f''，先求一阶偏导数，有

$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'$；$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'$；

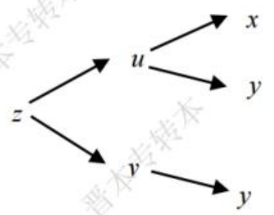
再求二阶偏导数：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''(2x)=2f'+4x^2f''$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''(2y)=4xyf''$；

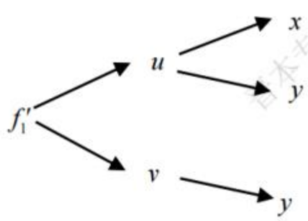
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''(2y)=2f'+4y^2f''$。

5．求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (其中 f 具有二阶连续偏导数).

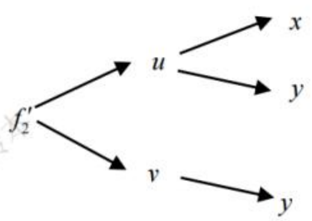
（1）$z=f(xy,y)$

【解析】令 $u=xy$，$v=y$，将 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 记为 f_1'，$\frac{\partial z}{\partial v}$ 记为 f_2'，链式关系图：





将 $\frac{\partial f_1'}{\partial u}$ 记为



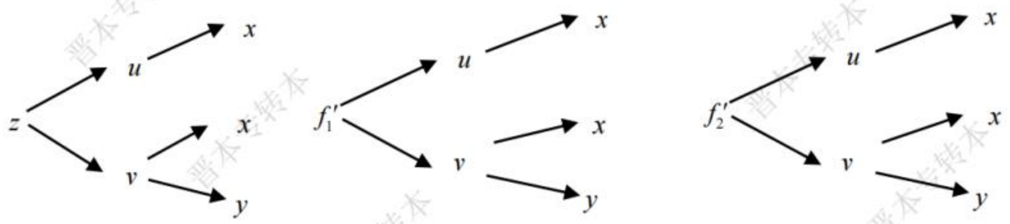
f''_{11}，$\dfrac{\partial f_1'}{\partial v}$ 记为 f''_{12}，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial u}$ 记为 f''_{21}，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial v}$ 记为 f''_{22}，显然 $f''_{12}=f''_{21}$。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'+f_2'$，所以有二阶偏导数

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf''_{11})=y^2f''_{11}$；$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf''_{11}+f''_{12}\right)$；$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(xf''_{11}+f''_{12})+xf''_{21}+f''_{22}=x^2f''_{11}+2xf''_{12}+f''_{22}$。

（2）$z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$

【解析】令 $u=x$，$v=\dfrac{x}{y}$，将 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ 记为 f_1'，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 记为 f_2'，链式关系图：



将 $\dfrac{\partial f_1'}{\partial u}$ 记为 f''_{11}，$\dfrac{\partial f_1'}{\partial v}$ 记为 f''_{12}，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial u}$ 记为 f''_{21}，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial v}$ 记为 f''_{22}，显然有 $f''_{12}=f''_{21}$。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f_2'$，所以有二阶偏导数

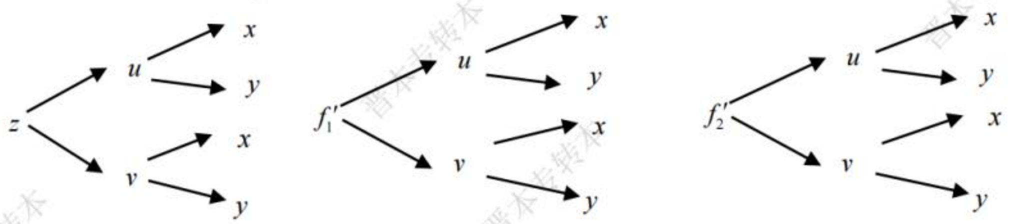
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+\dfrac{1}{y}f''_{12}+\dfrac{1}{y}\left(f''_{21}+\dfrac{1}{y}f''_{22}\right)=f''_{11}+\dfrac{2}{y}f''_{12}+\dfrac{1}{y^2}f''_{22}$；

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f''_{12}-\dfrac{1}{y^2}f_2'+\dfrac{1}{y}\left(-\dfrac{x}{y^2}f''_{22}\right)=-\dfrac{x}{y^2}f''_{12}-\dfrac{1}{y^2}f_2'-\dfrac{x}{y^3}f''_{22}$；

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}f_2'-\dfrac{x}{y^2}f''_{22}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=\dfrac{2x}{y^3}f_2'+\dfrac{x^2}{y^4}f''_{22}$

（3）$z=f\left(xy^2,x^2y\right)$

【解析】令 $u=xy^2$，$v=x^2y$，将 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ 记为 f_1'，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$ 记为 f_2'，链式关系图：



将 $\dfrac{\partial f_1'}{\partial u}$ 记为 f''_{11}，$\dfrac{\partial f_1'}{\partial v}$ 记为 f''_{12}，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial u}$ 记为 f''_{21}，$\dfrac{\partial f_2'}{\partial v}$ 记为 f''_{22}，显然有 $f''_{12}=f''_{21}$。

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2f_1'+2xyf_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2'$，所以有二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2(y^2f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+2xy(y^2f_{21}''+2xyf_{22}'')=2yf_2'+y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}''$$ ；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf_1'+y^2(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+2xf_2'+2xy(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2x^3yf_{22}''$$ ；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2xf_1'+2xy(2xyf_{11}''+x^2f_{12}'')+x^2(2xyf_{21}''+x^2f_{22}'')=2xf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}''$$

6. 求下列各方程所确定的隐函数的导数

（1）$\sin y+e^x-xy^2=0$

【解析】令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则代公式得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}$ 。

（2）$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$

【解析】令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)}{\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}}=-\frac{x+y}{y-x}$$ 。

7. 求下列各题所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数

（1）$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$

【解析】令 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$ ，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{xyz}}\cdot yz}{1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{xyz}}\cdot xy}=-\frac{\sqrt{xyz}-yz}{\sqrt{xyz}-xy}；\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{2-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{xyz}}\cdot xz}{1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{xyz}}\cdot xy}=-\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{\sqrt{xyz}-xy}$$ 。

（2）$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$

【解析】令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}}=-\frac{z}{-x-z}=\frac{z}{x+z}；\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{-\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)}{-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}}=-\frac{z^2}{-xy-yz}=\frac{z^2}{xy+yz}$$ 。

（3）$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$

【解析】令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{1}{3};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=\frac{2}{3}$$

（4）$e^{xy}-\arctan z+xyz=0$

【解析】令 $F(x,y,z)=e^{xy}-\arctan z+xyz$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{ye^{xy}+yz}{-\frac{1}{1+z^2}+xy}=\frac{y(1+z^2)(e^{xy}+z)}{1-xy(1+z^2)};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{xe^{xy}+xz}{-\frac{1}{1+z^2}+xy}=\frac{x(1+z^2)(e^{xy}+z)}{1-xy(1+z^2)}$$

8. 设 $z^3-2xz+y=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 以及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】将 $z^3-2xz+y=0$ 等号两边关于 x 求偏导数，得 $3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-2z-2x\frac{\partial z}{\partial x}=0$ ①

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x}$ ，等号两边关于 y 求偏导数，得 $3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-2x\frac{\partial z}{\partial y}+1=0$ ②

解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2x-3z^2}$，将①式两边再关于 x 求偏导数，得

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial x}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad ③$$

解得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4\frac{\partial z}{\partial x}-6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{3z^2-2x}=\frac{4\frac{2z}{3z^2-2x}-6z\left(\frac{2z}{3z^2-2x}\right)^2}{3z^2-2x}=\frac{8z(3z^2-2x)-6z\cdot 4z^2}{\left(3z^2-2x\right)^3}=-\frac{16xz}{\left(3z^2-2x\right)^3}$；

将①式两边关于 y 求偏导数，得

$$6z\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad ④$$

解得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial y}-6z\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{3z^2-2x}=\frac{2\frac{1}{2x-3z^2}-6z\frac{1}{2x-3z^2}\cdot\frac{2z}{3z^2-2x}}{3z^2-2x}=\frac{6z^2+4x}{\left(3z^2-2x\right)^3}$ ；

将②式两边关于 y 求偏导数，得 $6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ ⑤

解得 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{3z^2-2x}=-\frac{6z\frac{1}{(2x-3z^2)^2}}{3z^2-2x}=-\frac{6z}{\left(3z^2-2x\right)^3}$。

习题 8.4

1.求下列函数的极值点及极值

（1） $z=e^{2x}\left(x+2y+y^2\right)$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}(x+2y+y^2)+e^{2x}=0$， $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x}(2+2y)=0$，解得驻点为$\left(\frac{1}{2},-1\right)$，

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=4e^{2x}(x+2y+y^2+1)\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2e$ ，

$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2e^{2x}(2+2y)\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=0$ ， $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2e^{2x}\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2e$，

$B^2-AC=-4e^2<0$ 且 $A>0$，因此函数 $z=e^{2x}\left(x+2y+y^2\right)$ 在 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处取得极小值，极小值为

$z\bigg|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=-\frac{1}{2}e$.

（2） $z=4(x-y)-x^2-y^2$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=4-2x=0$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-4-2y=0$，解得驻点为$(2,-2)$，

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(2,-2)}=-2$ ， $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(2,-2)}=0$ ， $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(2,-2)}=-2$，

$B^2-AC=-4<0$ 且 $A<0$，因此函数 $z=4(x-y)-x^2-y^2$ 在 $(2,-2)$ 处取得极大值，极大值为

$z\Big|_{(2,-2)}=16-4-4=8$.

2.求函数 $z=\left(x^2+y^2-2x\right)^2$ 在圆球 $x^2+y^2\le 2x$ 点的最大值和最小值.

【解析】在边界 $x^2+y^2=2x$ 上，函数值始终为 0； $\frac{\partial z}{\partial x}=2(x^2+y^2-2x)(2x-2)=0$ ，

$\frac{\partial z}{\partial y}=2(x^2+y^2-2x)(2y)=0$，解得区域内的唯一驻点$(1,0)$，且$z\Big|_{(1,0)}=1$。所以，函数的最大值为 1，最小值为 0.

3.从斜边之长为l的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

【解析】设直角三角形的两条直角边分别为a,b，三角形的周长为$C=a+b+l$，又根据勾股定理有

$a^2+b^2=l^2$，用拉格朗日乘数法求条件极值 $L(a,b,\lambda)=a+b+l+\lambda(a^2+b^2-l^2)$，解联立方程组

$\begin{cases} L'_a=1+2a\lambda=0 \\ L'_b=1+2b\lambda=0 \\ L'_\lambda=a^2+b^2-l^2=0 \end{cases}$ ，解得 $a=b=\frac{l}{\sqrt{2}}$ ，因此两直角边相等均为 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 时取得最大周长，最大周长为

$(\sqrt{2}+1)l$.

4.在平面 xoy 上求一点,使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离的平方和最小.

【解析】$f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{(x+2y-16)^2}{5}$ ，求该函数的最小值即可。

$f_x'=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0$ ，$f_y'=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0$ ，解得唯一驻点 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$ ，因此点 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$ 到

$x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离的平方和最小.

5. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

【解析】椭圆上的点 (x,y,z) 到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，要计算原点到这椭圆的最长与最短距离，实际上只需要求 $x^2+y^2+z^2$ 的最大值和最小值，再开根号即可。并且椭圆上的点既在抛物面 $z=x^2+y^2$ 上，也在平面 $x+y+z=1$ 上 ，所以转化为求 $x^2+y^2+z^2$ 在 $x^2+y^2-z=0$ 和 $x+y+z-1=0$ 两个条件下的条件极值。用拉格朗日乘数法,

$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$ ，解联立方程组

$$\begin{cases} L_x'=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L_y'=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z'=2z-\lambda+\mu=0 \\ x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

，解得两个驻点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3}\right)$ ，$\left(\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2},2+\sqrt{3}\right)$ ，

$$d\Big|_{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$$ ，

$$d\Big|_{\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2},\frac{-\sqrt{3}-1}{2},2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$$ ，

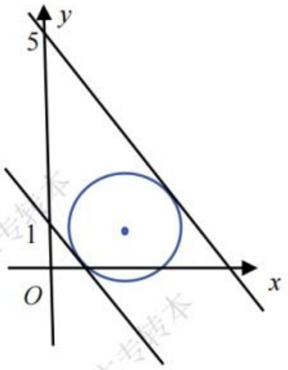
所以，最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ ，最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

习题 8.5

1. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

（1）$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成.

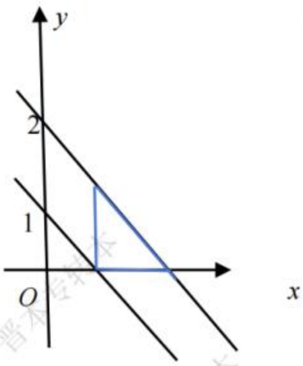
【解析】令 $x+y=b$，即 $y=-x+b$，b 为斜率为-1 的直线在 y 轴上的截距。当直线与圆相切时，满足 $\frac{|3-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$b=1$ 或 $b=5$，所以在积分区域内 $1\le x+y\le 5$，那么



$(x+y)^2 \le (x+y)^3$，由二重积分的性质知，$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \le \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$。

（2）$\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，顶点为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$.

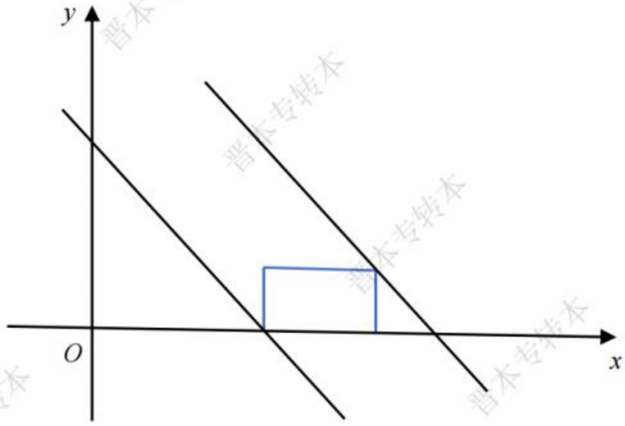
【解析】令 $x+y=b$，即 $y=-x+b$，b 为斜率为-1 的直线在 y 轴上的截距。如图所示，



在三角形区域内 $1\le x+y\le 2$，那么 $0\le \ln(x+y)\le \ln 2<1$，所以 $\ln(x+y)\ge[\ln(x+y)]^2$，由二重积分的性质知，$\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma \ge \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$。

（3）$\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|3\le x\le 5, 0\le y\le 1\}$.

【解析】令 $x+y=b$，即 $y=-x+b$， b 为斜率为-1 的直线在 y 轴上的截距。如图所示，



在矩形区域内，$3\le x+y\le 6$，那么 $1<\ln 3\le \ln(x+y)\le \ln 6$，所以 $\ln(x+y)\le[\ln(x+y)]^2$，由二重积分的性质知，$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma\le\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 。

2. 利用二重积分的性质估计下列积分的值：

（1）$I=\iint\limits_D xy(x+y)d\sigma$ ，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$；

【解析】在积分区域内，$0\le xy(x+y)\le 2$，又积分区域的面积 $\sigma=1$，所以由二重积分的估值定理，有 $0\cdot\sigma\le\iint\limits_D xy(x+y)d\sigma\le 2\cdot\sigma$ ，即 $0\le\iint\limits_D xy(x+y)d\sigma\le 2$ 。

（2）$I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$；

【解析】在积分区域内，$0\le\sin^2 x\sin^2 y\le 1$，又积分区域的面积 $\sigma=\pi^2$，所以由二重积分的估值定理，有 $0\cdot\sigma\le\iint\limits_D\sin^2 x\sin^2 y d\sigma\le 1\cdot\sigma$，即 $0\le\iint\limits_D\sin^2 x\sin^2 y d\sigma\le\pi^2$ 。

（3）$I=\iint\limits_D(x+y+1)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 2\}$.

【解析】在积分区域内，$1\le x+y+1\le 4$，又积分区域的面积 $\sigma=2$，所以由二重积分的估值定理，有 $1\cdot\sigma\le\iint\limits_D(x+y+1)d\sigma\le 4\cdot\sigma$，即 $2\le\iint\limits_D(x+y+1)d\sigma\le 8$ 。

习题 8.6

1．计算下列二重积分：

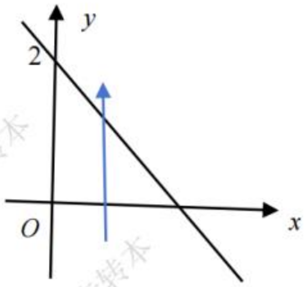
（1）$I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma$,其中$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\le 1,|y|\le 1\}$

【解析】$I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1}dx$

$=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$ 。

（2）$I=\iint\limits_D(3x+2y)d\sigma$,其中$D$是由两坐标轴及直线$x+y=2$所围成的闭区域

【解析】将积分区域看成 X 型区域，则$I=\iint\limits_D(3x+2y)d\sigma=\int_0^2\left(\int_0^{-x+2}(3x+2y)dy\right)dx$



$=\int_0^2\left[3xy+y^2\right]_0^{-x+2}dx$

$=\int_0^2\left[3x(2-x)+(2-x)^2\right]dx$

$=\left[4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$

$=\frac{20}{3}$

（3）$I=\iint\limits_D\left(x^3+3x^2y+y^3\right)d\sigma$,其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

【解析】$I=\iint\limits_D\left(x^3+3x^2y+y^3\right)d\sigma=\int_0^1\left(\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dy\right)dx$

$=\int_0^1\left[x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4\right]_0^1dx=\int_0^1\left[x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}\right]dx$

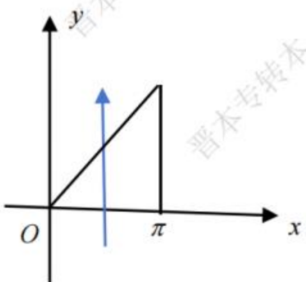
$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x\right]_0^1=1$ 。

（4）$I=\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$,其中$D$是顶点分别为$(0,0),(\pi,0)$和$(\pi,\pi)$的三角形闭区域

【解析】将积分区域看成 X 型区域，则$I=\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma=\int_0^{\pi}\left(\int_0^x x\cos(x+y)dy\right)dx$

$=\int_0^{\pi}[x\sin(x+y)]_0^x dx$

$=\int_0^{\pi}[x\sin 2x-x\sin x]dx$



$=\int_0^{\pi}(x\sin 2x)dx-\int_0^{\pi}(x\sin x)dx$

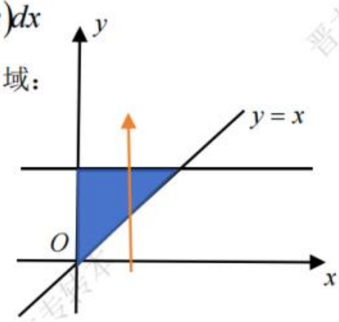
$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}xd(\cos 2x)+\int_0^{\pi}xd(\cos x)$

$=-\frac{1}{2}[x\cos 2x]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2xdx+[x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos xdx=-\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{3\pi}{2}$

2．改变下列二次积分的积分次序：

（1） $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$

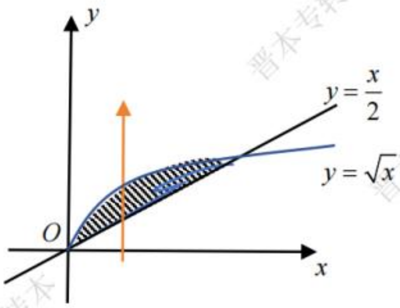
【解析】画出积分区域：



将其看成 X 型区域，则此二重积分写成累次积分为 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$.

（2） $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$

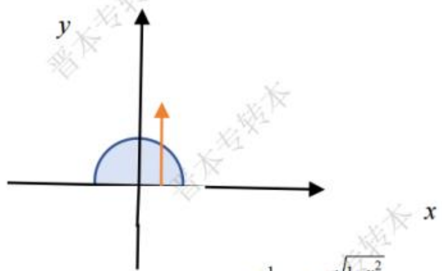
【解析】画出积分区域图：



将其看成 X 型区域，则此二重积分写成累次积分为 $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

（3） $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

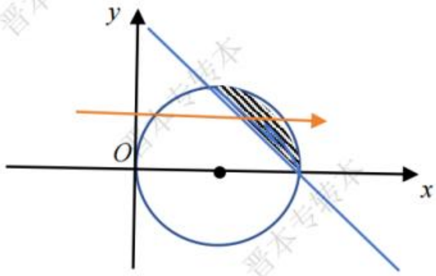
【解析】画出积分区域图：



将其看成 X 型区域，则此二重积分写成累次积分为 $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

（4） $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

【解析】画出积分区域：

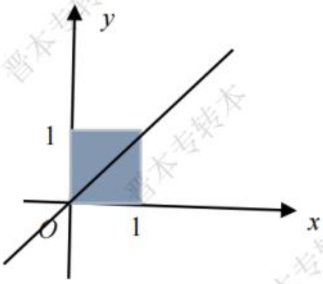


将其看成 Y 型区域，则此二重积分写成累次积分为$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

3．化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

（1）$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$

【解析】 积分区域如下图所示，



若将此二重积分写成极坐标形式下的二次积分，显然在$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$和$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时的边界是不一样的。

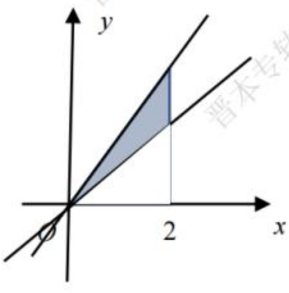
在$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$时，边界为$x=\rho\cos\theta=1$，即$\rho=\frac{1}{\cos\theta}$；在$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时，边界为$y=\rho\sin\theta=1$，即$\rho=\frac{1}{\sin\theta}$。

因此，写成极坐标形式下的二次积分为

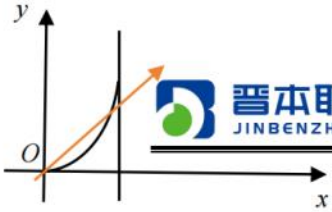
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（2）$\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$

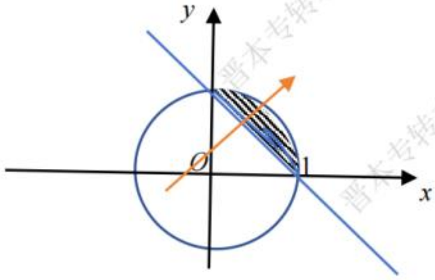
【解析】积分区域如下图所示，



若将此二重积分写成极坐标形式下的二次积分，则显然$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$，边界为$x=\rho\cos\theta=2$，即$\rho=\frac{2}{\cos\theta}$，



那么写成极坐标形式下的二次积分为$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(\rho)\rho d\rho$。



（3）$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

【解析】积分区域如图所示，

若将此二重积分写成极坐标形式下的二次积分，则显然$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le \rho \le 1$，因此写成极坐标形式下的二次积分为$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$。

（4）$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$

【解析】积分区域如图所示，

若将此二重积分写成极坐标形式下的二次积分，则显然$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$，$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}$，因此写成极坐标形式下的二次积分为$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$。

4．利用极坐标计算下列各题：

（1）$\iint\limits_D e^{x^2+y^2} d\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域；

【解析】积分区域为圆，显然$0 \le \theta \le 2\pi$，$0 \le \rho \le 2$，则

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{r^2} \cdot r dr = \pi\left(e^4-1\right)。$$

（2）$\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

【解析】因为D是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域，所以显然$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，$0 \le \rho \le 1$，则

$$\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r\ln(1+r^2)dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+r^2)d(1+r^2)$$

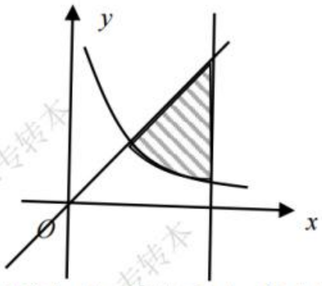
$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \ln(1+r^2)d(1+r^2)=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \ln(1+r^2)d(1+r^2)=\frac{\pi}{4}\left[(1+r^2)\ln(1+r^2)\right]_0^1-\frac{\pi}{4}\int_0^1(1+r^2)\frac{2r}{1+r^2}dr$$

$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$。

5. 选用适当的坐标计算下列各题：

（1）$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$,其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域

【解析】画出积分区域：

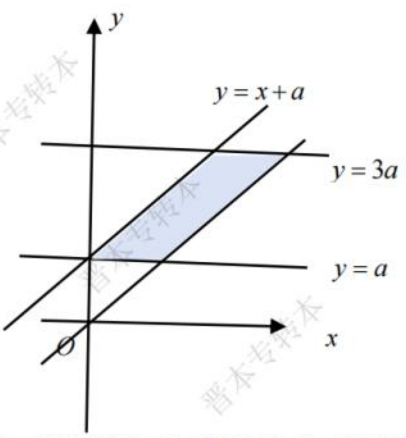


将其看成 X 型区域，即写成先对 y 积分再对 x 积分的累次积分，为

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy\right)dx=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2(-x+x^3)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\right]_1^2=\frac{9}{4}$$ 。

（2）$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域

【解析】积分区域如下图所示，



将其看成 Y 型区域，即写成先对 x 积分再对 y 积分的累次积分，为

$$\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\int_a^{3a}\left(\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)dx\right)dy=\int_a^{3a}\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x\right]_{y-a}^{y}dy$$

$$=\int_a^{3a}\left[\frac{1}{3}y^3+y^3-\frac{1}{3}(y-a)^3-y^2(y-a)\right]dy=\int_a^{3a}\left(\frac{1}{3}a^3+2ay^2-a^2y\right)dy$$

$=\left[\frac{1}{3}a^3y+\frac{2}{3}ay^3-\frac{1}{2}a^2y^2\right]_a^{3a}=14a^4$.

（3）$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|a^2\le x^2+y^2\le b^2\right\}$

【解析】因为 D 是圆环形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|a^2\le x^2+y^2\le b^2\right\}$，所以看成极坐标下的累次积分，计算较容易，且 $0\le\theta\le 2\pi$，$a\le\rho\le b$，则

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b r\cdot rdr=2\pi\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{3}a^3\right)=\frac{2}{3}\pi\left(b^3-a^3\right).$$

第八章　复习题

1. 设 $z=f(x,y)$ 为由方程 $z^3-3yz+3x=8$ 所确定的函数，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C.-2　　D.2

【正确答案】B

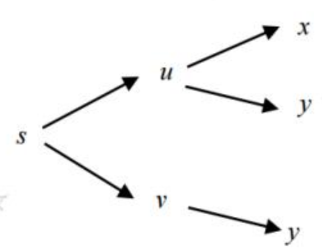
【解析】$F(x,y,z)=z^3-3yz+3x-8$

$F_y=-3z, F_z=3z^2-3y$，且 $x=0,y=0$ 时，$z=2$，则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\left.\frac{3z}{3z^2-3y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

2. 设 $z=xf\left(\frac{y}{x},y\right)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】令 $s=f\left(\frac{y}{x},y\right)$，则 $z=xs$，再令 $u=\frac{y}{x}$，$v=y$，那么 s 与 x 和 y 的链式关系图如下所示：



由链式求导法，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1\cdot f+x\left[f_1'\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot 0\right]=f-\dfrac{y}{x}f_1'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\right)-\frac{1}{x}\left[f_1'+y\left(f_{11}''\cdot\frac{1}{x}+f_{12}''\right)\right]=f_2'-\frac{y}{x^2}f_{11}''-\frac{y}{x}f_{12}''.$$

3. 设函数 $z=f(x,xy)+\varphi(x^2+y^2)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 φ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】令 $u=x,v=xy,w=x^2+y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=y,\frac{\partial v}{\partial y}=x,\frac{\partial w}{\partial x}=2x,\frac{\partial w}{\partial y}=2y$$

$$z=f(x,xy)+\varphi(x^2+y^2)=f(u,v)+\varphi(w)$$

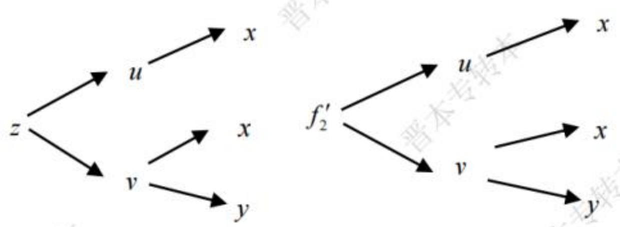
由链式求导法，有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+y\dfrac{\partial f}{\partial v}+2x\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial v}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+4xy\frac{d^2\varphi}{dw^2}\ .$$

4. 设函数 $z=f(x^2,e^{2x+3y})$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

【解析】令 $u=x^2$，$v=e^{2x+3y}$，则链式关系图如下所示：



$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot 3e^{2x+3y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(2xf_{21}''+2e^{2x+3y}f_{22}''\right)3e^{2x+3y}+6e^2$$

。

5. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz+x^3-2=0$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$（　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【正确答案】A

【解析】当 $x=1, y=0$ 代入方程得 $z=1$，方程两边关于 x 求偏导

$$3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

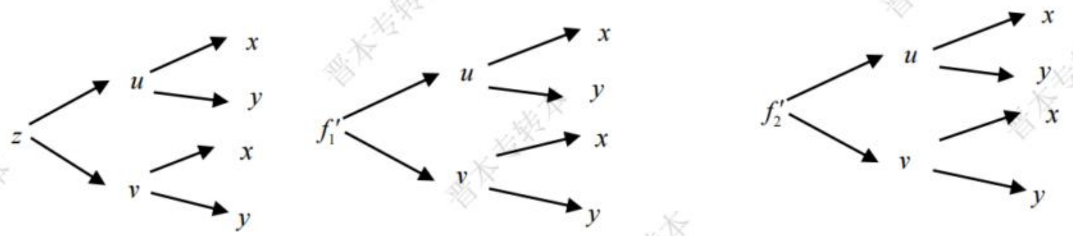
6\. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^2+xyz=1$ 所确定的函数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$__________.

【正确答案】$\frac{-yz}{2z+xy}$

【解析】方程两边对 x 求偏导，得 $2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-yz}{2z+xy}$.

7\. 设 $z=f\left(x^2y,x-y\right)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

【解析】令 $u=x^2y$，链式关系如下图



$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1'+f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2yf_1'+2xy(2$$

$$=2yf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4xyf_{12}''+f_{22}'' .$$

8\. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\sin(y+z)+xy+z^2=1$ 确定的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

【解析】

方程两边对 x 求导，有

$$\cos(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+y+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{\cos(y+z)+2z}$

方程两边对 y 求导

$$\cos(y+z)(1+\frac{\partial z}{\partial y})+x+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+2z}$

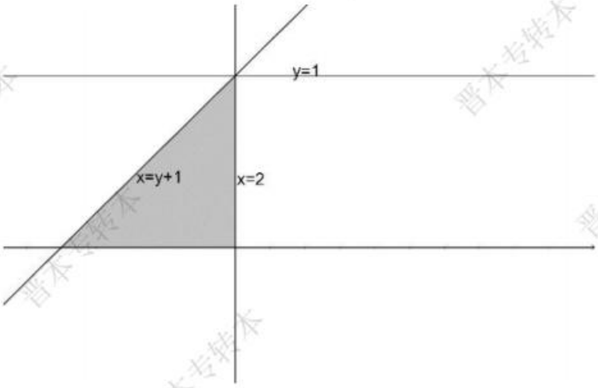
9. 如果二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 可化为二次积分 $\int_0^1 dy\int_{y+1}^2 f(x,y)dx$，则积分域 D 可表示为（　）

A. $\{(x,y)|0\le x\le 1, x-1\le y\le 1\}$　　B. $\{(x,y)|1\le x\le 2, x-1\le y\le 1\}$

C. $\{(x,y)|0\le x\le 1, x-1\le y\le 0\}$　　D. $\{(x,y)|1\le x\le 2, 0\le y\le x-1\}$

【正确答案】D

【解析】



根据图 $\{(x,y)|1\le x\le 2, 0\le y\le x-1\}$.

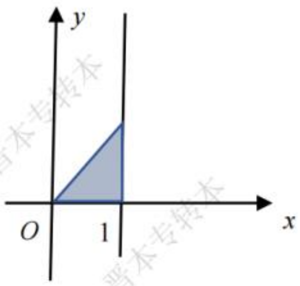
10. 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$ 在极坐标系下可化为（　）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho$　　D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

【正确答案】B

【解析】



$$D:\begin{cases} y\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \\ 0\le r\le\sec\theta \end{cases}$$

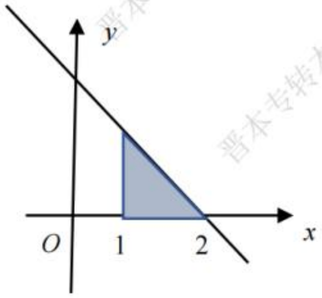
11. 二次积分 $\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$ 交换积分次序后得（　）

A. $\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^2 f(x,y)dx$　　D. $\int_0^1 dy\int_1^{2-y} f(x,y)dx$

【正确答案】D

【解析】积分区域：



$\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_1^{2-y} f(x,y)dx$.

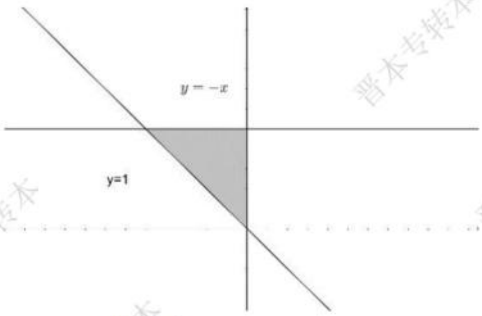
12. 二次积分 $\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^1 f(x,y)dy$ 交换积分次序后得（　　）

A. $\int_{-1}^0 dy\int_{-y}^1 f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{-y} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dy\int_{-y}^1 f(x,y)dx$　　D. $\int_0^1 dy\int_{-y}^0 f(x,y)dx$

【正确答案】D

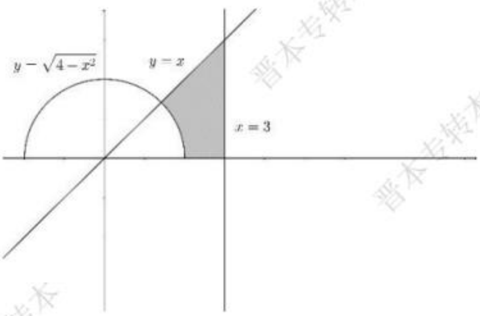
【解析】积分区域：



所以，$\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-y}^0 f(x,y)dx$.

13. 计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{4-x^2}\,(x>0)$ 与三条直线 $y=x, x=3, y=0$ 所围成的平面闭区域。

【解析】积分区域如图，看成极坐标下的累次积分，为

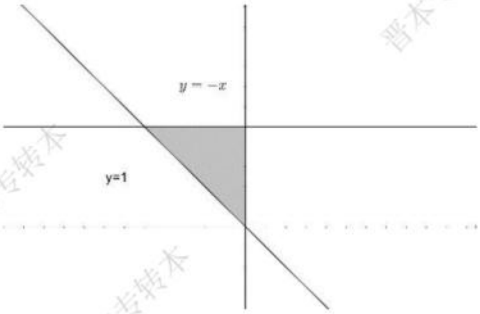


$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_2^{\frac{3}{\cos\theta}} r\cos\theta\cdot r dr = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{27}{\cos^2\theta}-8\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}(27\tan\theta-8\sin\theta)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 9-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

14. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由三直线 $y=-x, y=1, x=0$ 所围成的平面闭区域。

【解析】看成 X 型区域的累次积分，为



$$D:\begin{cases}-x\le y\le 1\\ -1\le x\le 0\end{cases}$$

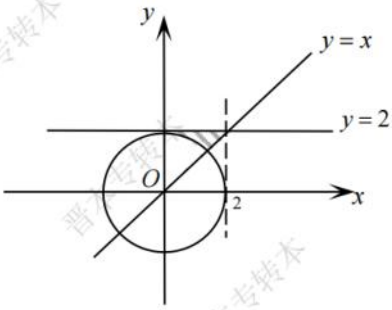
$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx\int_{-x}^{1}(x+y)dy$$

$$=\int_{-1}^{0}(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})dx = (\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{6}.$$

15. 计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=x, y=2$ 所围成的平面区域。

【解析】积分区域如图所示，看成 Y 型区域的累次积分，为

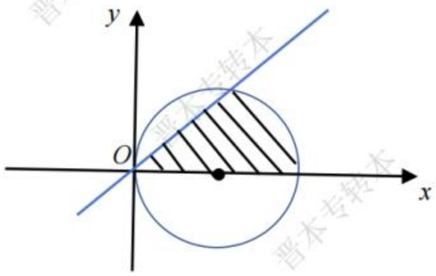
$$\iint\limits_D xydxdy = \int_{\sqrt{2}}^{2} ydy\int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} xdx$$



$$=\int_{\sqrt{2}}^{2} y(y^2-2)dy=(\frac{1}{4}y^4-y^2)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=1.$$

16. 计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\right\}$.

【解析】积分区域：



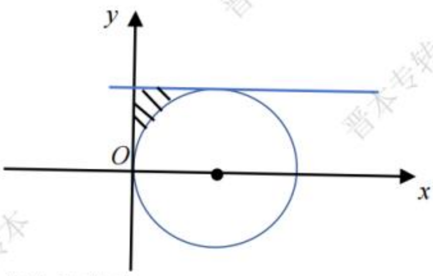
看成极坐标下的累次积分，且 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$， $0\le r\le 2\cos\theta$ ，

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\theta\sin\theta d\theta=-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\theta d\cos\theta=-\frac{2}{3}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{12}.$$

17. 计算二重积分 $\iint\limits_D ydxdy$，积分区域是由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与直线 $y=1$ 及 $x=0$ 所围成的平面区域.

【解析】积分区域：



看成 Y 型区域的累次积分为

$$\int_0^1 dy\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} ydx$$

$$=\int_0^1 y(1-\sqrt{1-y^2})dy=\int_0^1 ydy+\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,d(1-y^2)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1=\frac{1}{6}\ .$$

第九章 行列式与矩阵

习题 9.1

1.求下列各排列的逆序数.

（1）1 3 4 7 8 2 6 9 5

（2）5 1 8 3 9 4 2

（3）$(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n$

【答案】（1）10 （2）11 （3）$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

【解析】（1）$\tau=0+0+0+0+0+4+2+0+4=10$.

（2）$\tau=0+1+0+2+0+3+5=11$.

（3）$\tau=0+1+2+\cdots+(n-2)+0=\dfrac{[1+(n-2)](n-2)}{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

2.写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【答案】$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$、$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

【解析】四阶行列式为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

含 a_{11} a_{23} 的项是:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$、$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

3.计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$

【答案】ab^2-a^2b

【解析】$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}=ab^2-a^2b$

（2）$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

【答案】-10

【解析】解法一:原式$=2\cdot(-2)\cdot 3+3\cdot 1\cdot 1+4\cdot 5\cdot 2$

$$-2\cdot 1\cdot 2-3\cdot 5\cdot 3-4\cdot(-2)\cdot 1$$

$$=-10.$$

解法二: $\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&2&3\\5&-2&1\\2&3&4\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-5)r_1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-12&-14\\0&-1&-2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-12&-14\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+(-12)r_2}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&10\end{vmatrix}=-10.$$

解法三: $\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+(-5)r_3]{r_1+(-2)r_3}\begin{vmatrix}0&-1&-2\\0&-12&-14\\1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按}c_1\text{展开}}\begin{vmatrix}-1&-2\\-12&-14\end{vmatrix}=-10$.

(3) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$

【答案】-4

【解析】$\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+(-2)c_3}\begin{vmatrix}0&0&1\\3&-4&-1\\-7&8&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-4\\-7&8\end{vmatrix}=-4$.

(4) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$

【答案】$(a+b+c)(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2)$

【解析】$\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}\xlongequal[r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3+(-1)c_1]{c_2+(-1)c_1}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\b&c-b&a-b\\c&a-c&b-c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}c-b&a-b\\a-c&b-c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)[(c-b)(b-c)-(a-b)(a-c)]$$

$$=(a+b+c)(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2).$$

4.计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$

【答案】0

【解析】$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1&0&-10\\1&2&0&2\\10&3&0&-14\\0&1&1&7\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}4&-1&-10\\1&2&2\\10&3&-14\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}4&-9&-18\\1&0&0\\10&-17&-34\end{vmatrix}=-(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-9&-18\\-17&-34\end{vmatrix}=0$.

（2）$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}$

【答案】16

【解析】$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-3\\0&-4&4\\0&0&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&4\\0&-4\end{vmatrix}=16$.

5.解方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=5\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2\\3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0\end{cases}$

【答案】$x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=-1$

【解析】$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&-2&3\\2&-5&-3&-7\\3&-2&-1&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&3\\-5&-3&-7\\-2&-1&8\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1&0&0\\-5&-13&8\\-2&-5&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-13&8\\-5&14\end{vmatrix}=-142$

$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\3&3&0&5\\3&-2&0&-4\\-10&-1&0&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&5\\3&-2&-4\\-10&-1&9\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-27 & 0 & 32\\ 23 & 0 & -22\\ -10 & -1 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-27 & 32\\ 23 & -22\end{vmatrix}=-142$$

同理可得: $D_2=-284, D_3=-426, D_4=142$

由克莱姆法则,得 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$, $x_3=\dfrac{D_3}{D}=3, x_4=\dfrac{D_4}{D}=-1$.

6.问 λ,μ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

【答案】当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时,方程组有非零解

【解析】由推论,齐次方程组有非零解,则系数行列式 $D=0$.

因 $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=-\mu(\lambda-1)$

故只有当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时,方程组才可能有非零解.

i)当 $\mu=0$ 时,方程组为 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+x_3=0\end{cases}$

显然, $x_1=1, x_2=1-\lambda, x_3=-1$ 是它的一个非零解.

ii)当 $\lambda=1$ 时,方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$

显然, $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$ 是它的一个非零解.

习题 9.2

1.设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&4&b\\1&a&-5&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c&-1&4&3\\1&0&d&-2\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,求元素 a,b,c,d 的值.

【答案】$a=0,b=3,c=2,d=-5$

【解析】由 $A=B$,则对应位置上的元素相等,故 $a=0,b=3,c=2,d=-5$.

2.设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\2&3&-4&0\\-3&5&0&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&3&0&-3\\0&-4&9&12\\6&-8&-9&5\end{pmatrix}$$

求（1）$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ （2）$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$ （3）若 X 满足 $(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X})=\boldsymbol{O}$,求 X.

【答案】（1）$\begin{pmatrix}6&-9&3&9\\6&13&-21&-12\\-15&23&9&-17\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}-7&5&2&-5\\4&-6&19&36\\12&-14&-27&7\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\2&\frac{1}{3}&2&8\\1&-\frac{1}{3}&-6&\frac{22}{3}\end{pmatrix}$

【解析】（1）

$$3A-B=\begin{pmatrix}3&-6&3&6\\6&9&-12&0\\-9&15&0&-12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&3&0&-3\\0&-4&9&12\\6&-8&-9&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-9&3&9\\6&13&-21&-12\\-15&23&9&-17\end{pmatrix}$$

（2）

$$2A+3B=\begin{pmatrix}2&-4&2&4\\4&6&-8&0\\-6&10&0&-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9&9&0&-9\\0&-12&27&36\\18&-24&-27&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&5&2&-5\\4&-6&19&36\\12&-14&-27&7\end{pmatrix}$$

（3）由 $(3A-X)+2(B-X)=0$,得 $3Z=3A+2B$,则

$$Z=A+\frac{2}{3}B=\begin{pmatrix}1&-2&1&2\\2&3&-4&0\\-3&5&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&2&0&-2\\0&-\frac{8}{3}&6&8\\4&-\frac{16}{3}&-6&\frac{10}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\2&\frac{1}{3}&2&8\\1&-\frac{1}{3}&-6&\frac{22}{3}\end{pmatrix}$$

3.计算下列各题.

（1）$\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

【答案】(6)

【解析】$\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1-4+9)=(6)$

（2）$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&3\end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&-4&-6\\-3&6&9\end{pmatrix}$

【解析】$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&-4&-6\\-3&6&9\end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}-2&3\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix}0&7\\7&0\end{pmatrix}$

【解析】$\begin{pmatrix}-2&3\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+6&-8+15\\15-8&20-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7\\7&0\end{pmatrix}$

（4）$\begin{pmatrix}5&0\\3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&-4&3\end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ -7 & 14 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5+0 & 10+0 & 15+0 \\ -3-4 & 6+8 & 9-6 \\ 1+2 & -2-4 & -3+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ -7 & 14 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

4.计算 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$,其中

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

（2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】（1） $\begin{pmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】（1） $AB-BA=\begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 11 & 13 \\ 0 & -6 & -4 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

（2） $AB-BA=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & 4 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

5.计算下列各题.

（1） $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2$ （2） $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$

【答案】（1） $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】（1） $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

（2） $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-4\\0&2&1\end{pmatrix}$$

求（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$　　（2）$(\boldsymbol{AB})^T$.

【答案】（1）$\begin{pmatrix}1&4&4\\0&-2&-2\\1&4&5\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&-4&6\\-1&-5&8\end{pmatrix}$

【解析】（1）$A^TB=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-4\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&-2&-2\\1&4&5\end{pmatrix}$

（2）$(AB)^T=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&-4&-5\\2&6&8\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&-4&6\\-1&-5&8\end{pmatrix}$

7.设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$$

求（1）$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{C}\right|$　　（2）$\left|(2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}\right|$　　（3）$\left|(3\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)^2\right|$.

【答案】（1）10　（2）-1　（3）81

【解析】（1）$\left|A^TB^2C\right|=|A||B|^2|C|=\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&-4\\-5&3\end{vmatrix}^2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot1^2\cdot5=10$.

（2）$\left|(2A-3C)B\right|=\left|2A-3C\right|\left|B\right|=\left|\begin{pmatrix}6&4\\10&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&3\\9&12\end{pmatrix}\right|\begin{vmatrix}7&-4\\-5&3\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}0&1\\1&-4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&-4\\-5&3\end{vmatrix}=(-1)\cdot1=-1$.

（3）$\left|\left(3BB^T\right)^2\right|=\left|9B^2B^{T2}\right|=9^2\cdot|B|^4=81\cdot\begin{vmatrix}7&-4\\-5&3\end{vmatrix}=81\cdot1^4=81$.

习题 9.3

1.求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

【解析】$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

$A^*=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A_1^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

【答案】$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

【解析】$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 18 & -29 & 0 \\ 5 & -8 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 18 & -29 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$A^*=\begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

【解析】$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix}-1&4&3\\-1&5&3\\1&-6&-4\end{pmatrix},A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

（4）$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

【解析】$\begin{vmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{vmatrix}=8\neq0$, $A^*=\begin{pmatrix}4&0&0\\-2&4&0\\1&-2&4\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2.求满足下列方程的矩阵 X .

（1）$\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&-1\\-3&1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1&4\\2&5\\1&-3\end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix}-\frac{13}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&-\frac{11}{5}\\-3&-1\end{pmatrix}$

【解析】设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&-2&-1\\-3&1&2\end{pmatrix}$, $|A|=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&-2&-1\\-1&-3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2\\-1&-3\end{vmatrix}=-5$

$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore X = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{11}{5} \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

（2）$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

【解析】设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |B| = 1, B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \therefore X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

【答案】$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

【解析】$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

习题 9.4

1.用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$

【答案】（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-4r_2}]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 & 14 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-14r_2 \\ r_4-7r_2}]{\substack{r_2 \div 7 \\ r_1+2r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.利用矩阵的初等变换,求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】（1）$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$（2）$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

【解析】（1）$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（2）$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3.用矩阵的初等变换,求解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

【答案】(1) $X=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ (2) $X=\begin{pmatrix}-\frac{13}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{11}{5}\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

【解析】(1)

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&1&0&2\\-3&2&-4&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&2\\0&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{9}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&2\\0&0&-5&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\1&-2&-1&2&5\\-3&1&2&1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&0&-1&3&1\\0&-5&2&-2&9\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&-5&2&-2&9\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&0&-1&4\\0&-5&0&4&11\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-\frac{13}{5}&-\frac{2}{5}\\0&1&0&-\frac{4}{5}&-\frac{11}{5}\\0&0&1&-3&-1\end{array}\right)\qquad\therefore X=\begin{pmatrix}-\frac{13}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&-\frac{11}{5}\\-3&-1\end{pmatrix}$$

4.求下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\2&1&1&-1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&2&-1&4&1&1\\2&5&1&15&-2&5\\1&3&2&11&2&7\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1\\1&1&1&0&1&1&0\\2&2&1&1&0&1&1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

【答案】(1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 3

【解析】（1）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\2&1&1&-1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&-1&-1&-1&-1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=2$

（2）$A\to\begin{pmatrix}1&2&-1&4&1&1\\0&1&3&7&-4&3\\0&1&3&7&1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&4&1&1\\0&1&3&7&-4&3\\0&0&0&0&5&3\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=3$

（3）$A\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1&-1\\0&0&1&-1&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1&-1\\0&0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=3$

（4）$A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=3$.

第十章 向量与线性方程组

习题 10.1

1.求解下列非齐次线性方程组.

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ x_1-x_2+3x_3=2 \\ 3x_1-6x_2-x_3=25 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \qquad =1 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ \qquad x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$

【答案】（1）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

【解析】（1）

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（2）$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

方程同解于$\begin{cases} x_1-x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2 \\ 1-c_1-c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.求解下列齐次线性方程组.

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$

【答案】（1）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}k\\-3k\\\frac{4}{3}k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

【解析】$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&1&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&-1\\0&0&-3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

∴方程组同解于$\begin{cases}x_1-\frac{4}{3}x_4=0\\x_2+3x_4=1\\x_3-\frac{4}{3}x_4=0\end{cases}$

$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}k\\-3k\\\frac{4}{3}k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$

（2）$A=\begin{pmatrix}1&2&-2&2&-1\\1&2&-1&3&-2\\2&4&-7&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2&2&-1\\0&0&1&1&-1\\0&0&-3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&4&-3\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

∴方程组同解于$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_4-3x_5=0\\x_3+x_4-x_5=0\end{cases}$

$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2c_1-4c_2+3c_3\\c_1\\-c_2+c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. λ 为何值时,非齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$

（1）有唯一解; （2）无解; （3）有无穷多个解.

【解析】（1）$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[r_1\div(\lambda+2)]{r_1+r_2+r_3}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

当$|A|\neq 0$时,即当$\lambda\neq 1,\lambda\neq -2$时,$R(A)=3$,方程组有唯一解.

（2）当$\lambda=-2$时

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&3&-3&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

$R(A)=2$, $R(B)=3$, $R(A)\neq R(B)$,于是方程组无解

（3）当$\lambda=1$时,$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

可见,$R(A)=R(B)=1<3$,于是方程组有无穷多解.

习题 10.2

1.设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,-1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,2)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,10,0,-5)^T$,求

（1）$2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$　　（2）$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$

【答案】（1）$\begin{pmatrix}-1\\12\\8\\-11\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}x_1-3x_3\\2x_1+x_2+10x_3\\3x_1-x_2\\-x_1+2x_2-5x_3\end{pmatrix}$

【解析】（1）$2\overline{\alpha}_1-2\overline{\alpha}_2+\overline{\alpha}_3=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\10\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\12\\8\\-11\end{pmatrix}$

（2）$x_1\overline{\alpha}_1+x_2\overline{\alpha}_2+x_3\overline{\alpha}_3=x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\10\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-3x_3\\2x_1+x_2+10x_3\\3x_1-x_2\\-x_1+2x_2-5x_3\end{pmatrix}$

2.设 $\boldsymbol{\alpha}=(6,-2,0,4)^T$,$\boldsymbol{\beta}=(-3,1,5,7)^T$,求向量 $\boldsymbol{\gamma}$,使得 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$.

【答案】$\overline{\gamma}=\begin{pmatrix}-21\\7\\15\\13\end{pmatrix}$

【解析】$\overline{\gamma}=3\overline{\beta}-2\overline{\alpha}=3\begin{pmatrix}-3\\1\\5\\7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6\\-2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\7\\15\\13\end{pmatrix}$

3.把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

（1）$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

（2）$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

【答案】（1）$\overline{\beta}=-\overline{\alpha}_1-2\overline{\alpha}_2+4\overline{\alpha}_3$　（2）$\overline{\beta}=\overline{\alpha}_1+2\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_3$

【解析】（1）

$$\left(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3\mid\overline{\beta}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&2\\1&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&2\\0&-1&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&-2\\0&0&1&4\end{array}\right)$$

$\therefore\ \overline{\beta}=-\overline{\alpha}_1-2\overline{\alpha}_2+4\overline{\alpha}_3$.

（2）$\left(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3\mid\overline{\beta}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\therefore\ \overline{\beta}=\overline{\alpha}_1+2\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_3$.

4.判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,5)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)^T$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$

【答案】（1）线性无关 （2）线性相关

【解析】（1）方法一:$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-3\end{vmatrix}=-3\neq0$

$\therefore\ \overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3$线性无关.

方法二:$\left(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}$

$\therefore\ R=3,\therefore\ \overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3$线性无关.

（2）$\left(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&3&3\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ R=2,\therefore\ \overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3$线性相关.

5.设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^T$,问$t$为何值时,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关？$t$为何值时,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关？

【解析】方法一: $(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{pmatrix}$

i）当 $t=5$ 时 $r=2$,向量组线性相关

ii）当 $t\neq5$ 时 $r=3$,向量组线性无关.

方法二：$|\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{vmatrix}$

i）$t=5$,行列式等于 0,线性相关

ii）$t\neq5$,行列式不等于 0,线性无关.

习题 10.3

1.求下列向量组的秩及其一个最大线性无关组, 并将其余向量用最大线性无关组线性表示.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-3)^T$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,5,6)^T$,

$\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,2,0)^T$

【解析】（1）$(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3,\bar{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&-1&-1&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 向量组的秩 $R=3$, $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3$ 是一个最大线性无关组, $\bar{\alpha}_4=-3\bar{\alpha}_1+5\bar{\alpha}_2-\bar{\alpha}_3$.

（2）$(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3,\bar{\alpha}_4,\bar{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&1&1&1&0\\0&2&2&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R=3$ $\therefore \bar{\alpha}_1$，$\bar{\alpha}_2$，$\bar{\alpha}_4$ 构成一个极大无关组

$\bar{\alpha}_3=3\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2+0\bar{\alpha}_4,\bar{\alpha}_5=-\bar{\alpha}_1-\bar{\alpha}_2+\bar{\alpha}_4$.

习题 10.4

1.求下列齐次方程组的一个基础解系，并写出通解.

（1）$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

【解析】（1）$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

∴原方程同解于$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

基为：$\overline{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

方程组解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

原方程同解于$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

一组基为$\overline{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overline{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$方程组通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1\overline{\xi_1} + k_2\overline{\xi_2} + k_3\overline{\xi_3} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.求下列非齐次线性方程组的通解及相应的齐次线性方程组的一个基础解系.

（1）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 8 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 16 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$

【解析】（1）$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 & 8 \\ 5 & 10 & 1 & -5 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,同解于$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = 3 \\ x_3 \qquad\qquad = 1 \end{cases}$

$\therefore \overline{\xi_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\overline{\xi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\overline{\xi_1} + k_2\overline{\xi_2} + \eta^* = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

（2）$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

因为$R(A) = 2$, $R(A|b) = 3$,故此方程组无解.